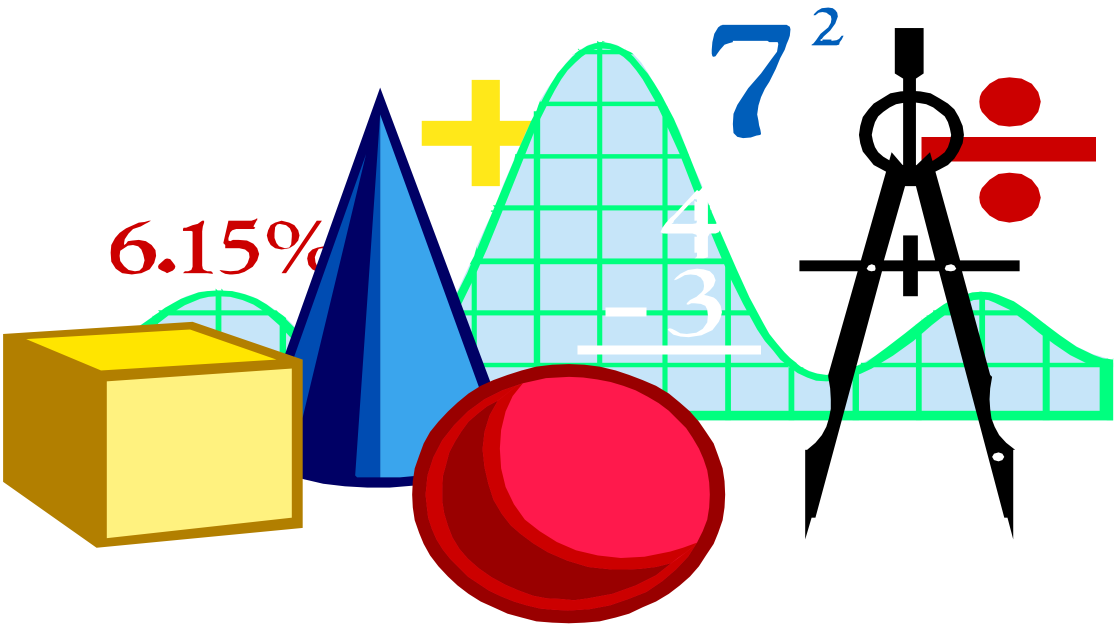
А.МАДРАҲИМОВ
А.ЮСУПОВА

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА



Фарғона – 2007

А.Э.Мадрахимов, А.К.Юсупова. Математик статистика. (1-қисм) (услубий кўрсатма). Фарғона-2007. 72 б.

Тақризчилар: 1. Асимов А. - физ.-мат.фанлари номзоди, доцент.
2. Мамажонов М.- ФарПИ Олий математика кафедраси доценти, физ.-мат.фанлари номзоди.

Ушбу услубий кўрсатма 5460100 - математика йўналиши талабалари учун Давлат стандартлардаги математика фани дастурига мослаб ёзилган бўлиб, иқтисодиёт, биология, социология ва тарих йўналишлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин. Услубий кўрсатма Фарғона Давлат университети Илмий кенгаши томонидан нашрга тавсия қилинган.

Сўз боши

Ушбу услубий кўрсатма математик статистика фанидан назарий билимларни олиш учун мўлжалланган бўлиб, у Давлат таълим стандартлари ва намунавий ўқув дастурига мос ҳолда ёзилди. Шуни таъкидлаш зарурки, ушбу кўрсатмага кирган деярли барча мавзулар турли адабиётларда ёритилган ҳамда уларнинг деярли ҳаммаси рус тилида ёзилган. Бундан ташқари, мавзуларда айрим тақсимотларнинг зичлик ва тақсимот функциялари умумий кўринишларининг исботи берилмаган. Кадрлар тайёрлаш миллий дастурини амалга ошириш концепциясига асосан ўзбек тилида математик статистика фанидан маърузалар ўқиш учун услубий кўрсатма яратиш зарурлигини кўрсатди. Шу эҳтиёж асосида математик статистика фанидан ушбу услубий кўрсатманинг I қисми ёзилди ҳамда бу услубий кўрсатма Қ.Холматов ва бошқалар томонидан ёзилган «Математик статистикадан амалий ва лаборатория машғулотларини ўтказиш учун» услубий кўрсатманинг бевосита давомидир ва улар бир-бирини тўлдиради.

Услубий кўрсатма асосан математика, амалий математика ва информатика йўналишлари талабалари учун ёзилган бўлиб, ундан иқтисодиёт, биология, социология ва тарих йўналишлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Муаллифлар ушбу кўрсатма юзасидан билдириладиган фикр ва мулоҳазалар учун олдиндан миннатдорчилик изҳор этадилар.

Математик статистиканинг асосий масалалари

Статистика сўзи лотинча бўлиб, ҳолат, вазият деган маънони англатади. Статистика табиатда ва жамиятда бўладиган оммавий ҳодисаларни ўрганади. Математик статистиканинг вазифаси статистик маълумотларни тўплаш, уларни таҳлил қилиш ва шу асосда баъзи бир хулосалар чиқаришдан иборатдир.

Энди математик статистиканинг асосий масалалари билан танишиб чиқамиз.

1.Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор устида n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказиб, x_1. $x_2, .., x_n$ қийматларни олган бўлайлик. x_1. $x_2, .., x_n$ лар бўйича ξ тасодифий миқдорнинг номаълум $F(x)$ тақсимот функциясини баҳолаш математик статистиканинг вазифаларидан биридир.

2. ξ тасодифий миқдор k та номаълум параметрга боғлиқ маълум кўринишдаги тақсимот функцияга эга бўлсин.

ξ тасодифий миқдор устидаги кузатишларга асосланиб, бу номаълум параметрларни баҳолаш математик статистиканинг навбатдаги вазифасидир.

Мисол. Фараз қилайлик, А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p бўлиб, бу p номаълум бўлсин ва уни баҳолаш талаб этилсин. Демак, бу ҳолда ξ тасодифий миқдор 1 ни p эҳтимол билан, 0 ни $1 - p = q$ эҳтимол билан қабул қилдим деб фараз қилиш мумкин, натижада ξ тасодифий миқдорнинг тақсимоти фақат p параметрга боғлиқ бўлади.

Айтайлик, ξ тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$f(x,a,s) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$$

берилган бўлсин. Бу ҳолда a маълум, σ номаълум; σ маълум, a номаълум ҳамда a ва σ лар номаълум бўлиши мумкин. Номаълум σ ва a ни баҳолаш талаб этилади. Бу масалани аниқроқ қилиб қуйидагича баён этиш мумкин: ξ тасодифий миқдор устида олиб борилган кузатишлар натижасида $x_1. x_2, .., x_n$ миқдорлар ҳосил қилинган бўлсин, шундай

$$a\ (x_1. x_2, .., x_n)\ s\ (x_1. x_2, .., x_n)$$

функцияларни топиш керакки, кузатишлар сони етарлича катта бўлганда, бу функцияларни, мос равишда, ξ тасодифий миқдорнинг баҳоланаётган ўрта қиймати a ва дисперсияси s нинг тақрибий қиймати сифатида қабул қилиш мумкин бўлсин. Баъзи ҳолларда a ва σнинг тақрибий қийматларини топиш ўрнига тажрибаларнинг натижалари ва маълум миқдорларга боғлиқ бўлган шундай a', a'' (σ' ва σ'') функцияларни излаш фойдалироқ бўладики, етарлича ишонч (бизни қаноатлантирадиган эҳтимол) билан

$$a' < a < a'', \qquad s' < s < s''$$

тенгсизликлар ўринли бўлишини таъкидлаш мумкин бўлсин. (a', a''), (σ', σ'') интервалларни a ва s лар учун ишончлилик интерваллари дейилади.

3.Кузатилаётган миқдорларнинг тақсимот қонунлари, баъзи характеристикалари ҳақидаги ҳар қандай фаразлари «статистик гипотезалар» деб аталади. Фараз қилайлик, баъзи мулоҳазаларга асосланиб, ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини $F(x)$ деб ҳисоблаш мумкин бўлсин, шу $F(x)$ функция ҳақиқатан ҳам ξ нинг тақсимот функциясими ёки йўқми деган савол статистик гипотеза ҳисобланади.

У ёки бу гипотезани текшириш учун кузатишлар орқали ёки махсус тажрибалар ўтказиш йўли билан маълумотлар олиб, уларни белгиланган гипотезага мувофиқ назарий жиҳатдан кузатилаётган маълумотлар билан таққослаб кўриш керак. Агар олинган маълумотлар ҳақиқатан ҳам назарий жиҳатдан кутилган маълумотлар билан мос келса, у вақтда бу факт ўша гипотезанинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиши билан, уни қабул қилиш учун асос бўлиши мумкин. Агар олинган маълумотлар назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотга етарлича тўғри келмаса, у ҳолда қилинган гипотезани қабул қилишга асос бўлмайди.

Умуман, кузатиш натижалари билан назарий жиҳатдан кутиладиган натижа орасидаги фарқ турлича бўлиши мумкин. Шу фарқни статистик баҳолаш натижасида у ёки бу гипотезани маълум эҳтимол билан қабул қилиш мумкин, яъни шу фарқ катта бўлса, гипотеза қабул қилинмайди, акс ҳолда қабул қилинади, албатта бу фарқ қанчалик бўлганда гипотезани қабул қилиш мумкинлиги масаланинг қўйилишига боғлиқ бўлади.

Бош тўплам. Танланма тўплам

Фараз қилайлик, бирор территориядаги сизот сувлар чуқурлигини аниқлаш вазифа қилиб, қўйидаги бўлсин. Бунинг учун ўша территориянинг турли жойларида маълум чуқурликда бир нечта махсус қудуқлар қазилиб, ўлчаш ишлари олиб борилади ва ўша территориядаги сизот сувларни ўртача чуқурлигини аниқлаш мумкин бўлади. Шу территориянинг ҳамма нуқталарида юқоридаги каби ишларни бажариш амалий нуқтаи назардан мумкин бўлмайди. Ёки, маълум пахта майдонидаги кўсакларнинг ўртача оғирлигини аниқлаш масаласини кўрайлик. Бунинг учун ўша майдоннинг турли жойларидан тенг миқдордаги кўсакларни йиғиб олиб, уларнинг оғирликларини ўлчаш ва шу майдондаги кўсакларнинг ўртача оғирлиги тўғрисида фикр юритиш мумкин. Текширишнинг бундай усули танланма усул дейилади, йиғиб олинган кузатиш натижалари (территориянинг турли жойларида аниқланган сизот сувнинг чуқурлиги, маълум жойлардан йиғиб олинган кўсаклар) танланма тўплам дейилади. Бу мисолларда территориянинг барча нуқталаридаги сизот сувларнинг чуқурликлари, кузатилган пахта майдонидаги барча кўсаклар тўплами бош тўплам дейилади.. Шундай қилиб, танланма тўплам деб тасодифий равишда олинган объектлар тўпламига, бош тўплам деб эса танланма тўплам ажратиб олинадиган объектлар тўпламига айтилади.

Бош тўплам ёки танланма тўпламнинг ҳажми деб, бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, юқоридаги биринчи мисолда сизот сувларнинг чуқурлигини аниқлашда 20 та нуқтада турли вақтларда 5 та ўлчаш олиб борилган бўлса, танланма тўпламнинг ҳажми 100 га тенг бўлади. Бош тўплам ҳажмини N, танланма тўплам ҳажмини эса n билан белгилаймиз. Танланмаларни икки усулда олишимиз мумкин. Агар бош тўпламлардан танланма тўплам ажратиб, бу тўплам устида кузатиш олиб борилгандан сўнг, бу танланма тўплам кейинги танлашдан олдин яна бош тўпламга қайтарилса ва кейин яна танланма олинса ва ҳ.к. бундай танлаш усули такрорий танланма дейилади. Агар бош тўпламдан танланма тўплам ажратиб, бу тўплам устида кузатиш олиб борилгандан сўнг бош тўпламга қайтарилмаса, бундай танлаш усули такрорий бўлмаган танланма дейилади. Практикада кўпинча такрорий бўлмаган танлаб олиш усулидан фойдаланилади. Абатта, бу иккала танлаб олиш усулида ҳам танланма бош тўпламнинг барча хусусиятларини сақлаган ҳолда олиниши керак, яъни танланма тўплам бош тўпламга «ўхшаш» бўлишини таъминлайдиган қилиб танлаш лозим. Агар танланма тўплам бош тўпламни деярли барча хусусиятларини ўзида сақласа, у ҳолда бундай танланма репрезентатив (ваколатли) танланма дейилади.

Репрезентатив танланма ҳосил қилиш учун биз танланмани тасодифий қилиб тузамиз. Танлаб олиш усули бош тўпламнинг бизни қизиқтирадиган белгисига ҳеч қандай таъсир қилмайди ва бош тўпламнинг ҳар бир элементи танланмада бир хил имконият билан қатнашиши таъминланади. Агар танланма тўплам репрезентативлигини сақламаса, у ҳолда танланма тўплам устида чиқарилган хулосани бош тўпламга татбиқ қилиш нотўғри хулосага олиб келиши мумкин.

Мисол. 1936 йили АҚШ президентлигига Ф.Д.Рузвельт номзоди ва А.М.Ландон номзоди кўрсатилади. Америка журналларидан бири бу икки номзоддан қайси бирининг президент бўлиши мумкинлигини олдиндан айтмоқчи бўлган, бунинг учун бош тўплам сифатида барча сайловчиларни, танланма сифатида хусусий телефонлар қайд қилинган китобдан - маълумотномадан таваккалига 4 миллион кишининг фамилиясини ажратади ва уларнинг фикрини билиш учун ҳар бирига хат ёзади ҳамда жавобларни йиғиб кўргач, А.М.Ландон президент бўлиши мумкинлигини эълон қилади. Шу вақтда американлик социологлар Гэллен ва Роупер бош тўпламдан фақат 4 минг сайловчини ажратиб оладилар.

Сайловчиларни ажратиб олишда уларнинг жамиятдаги тутган ўринлар, социал тенгсизликлар, сайловчиларнинг жамиятдаги нисбати каби факторларга эътибор берганлар. Бу социологларнинг танланмасида репрезентативлик сақланган. Натижада улар бу 4 минг сайловчининг фикри бўйича сайловда Ф.Д.Рузвельт сайланиши мумкинлигини айтадилар. Сайлов ўтгандан сўнг Гэллен ва Роупернинг фикри тасдиқланади. Биринчи ҳолда танланма тўпламининг ҳажми катта бўлгани билан репрезентативлик сақланмагани учун нотўғри хулоса чиқаришга асос бўлган. Бу мисолдан кўринадики, танланма тўпламни тўғри танланган ҳолда бош тўплам ҳақида фикр юритилса, математик статистиканинг хулосалари тўғри бўлади.

Статистик маълумотларни таҳлил қилиш

Кузатиш натижаларини вариантлар деб аталади ва уни математик статистикада $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ каби белгиланиб, n ҳажмли варианти дейилади. Статистик хулоса чиқаришда қуйидаги қоидаларга амал қилиш тавсия этилади:

1) $x_{(1)}=min\ (x_1, x_2, .., x_n)$

2) $x_{(n)}=max\ (x_1, x_2, .., x_n)$

3) $R=x_{(n)}-x_{(1)}$- танлаш қулочи

4) n тадан s таси турли бўлсин (s £ n)

x_1	x_2	.	x_n	Вариантлар
α_1	α_2	..	α_n	такрорланишлар сони

бу ерда,

$$a_1+a_2+..+a_n=n$$

I - жадвални танланма частоталар тақсимоти дейилади.

5)

x_1	x_2	..	x_s
w_1	w_2	..	w_s

$w_i = \dfrac{a_i}{n}$ $(i=\overline{1,s})$, бу ерда $w_1 + w_2 + \ldots + w_s = 1$, бу жадвални нисбий частоталар тақсимоти дейилади.

6) Частоталар полигонини қуриш.

7) Агар йиғилган статистик маълумотлар деярли кўп сонда бўлса, у ҳолда частоталар тақсимоти (нисбий частоталар тақсимоти полигони) тушунчалари ўрнига гистограмма деган тушунчани ишлатамиз.

Т/№	x_i-x_{i+1}	Қисмий ораликқа тушувчи частоталар	Нисбий частоталар
1	X x_1-x_2	α_1	w'_1
2	x_2-x_3	α_2	w'_2
. . .	. . .	. . .	. . .
S	x_{s-1}-x_s	α_s	$w'_{ы-1}$

$h = \frac{R}{k}$, k- Стерджс жадвалидан олинади. $w'_i = \frac{a'_i}{n}$

Гистограмма бу эни h га ва баландлиги турли бўлган тўрт бурчаклар тўпламидан иборат. Бундан ташқари статистик маълумотларни таҳлил қилишда эмпирик моментлар ва вариация коэффициентлари, ассиметрия коэффициенти, мода, медиана ва бошқа сонли характеристикаларни билиш ҳам муҳим ўрин тушади..

Эмпирик тақсимот функция

Агар танланманинг нисбий частоталар тақсимоти

x_1	x_2	..	x_s
w_1	w_2	..	w_s

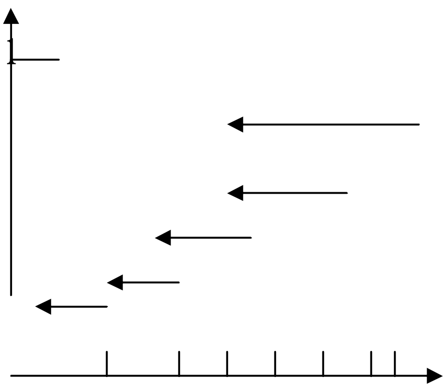
бўлса. Эмпирик тақсимот функция

$$F_э(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1\\ w_1 & x_1<x\le x_2\\ w_1+w_2, & x_2<x\le x_3\\ w_1+w_2+w_3, & x_3<x\le x_4\\ w_1+w_2+\ldots+w_{s-1} & x_{s-1}<x\le x_s\\ 1, & x_s<x<\infty\end{cases}$$

каби аниқланади.

Унинг графиги зинасимон пиллапоядан иборат. Эмпирик тақсимот функция назарий тақсимот функциянинг барча хоссаларига бўйсунади.

Агар кузатиш натижалари етарлича кўп бўлса, у ҳолда полигон тушунчаси ўрнига гистограмма тушунчаси қўлланилади.



Гистограмма - бу эни бир хил бўлган баландлиги эса турлича бўлган тўртбурчаклар тўпламидан иборат.

1) x_{min} - энг кичигини, кейин x_{max} ни топамиз,
2) танланма қулочини топамиз; $R=x_{max}-x_{min}$
3) 2 та вариант орасидаги фарқ: $h=\frac{R}{k}$, k - Стерджс жадвалидан топилади.

h ни қулайроқ танлаш учун R ифодани қийматини бутун сонга айлантириб олиш таклиф этилади. Бунинг учун x_{min} ни чапга x_{max} ўнга сурилади. Бундан ташқари h ни ҳам имконият даражасида қулай танлаб олиш маслаҳат берилади.

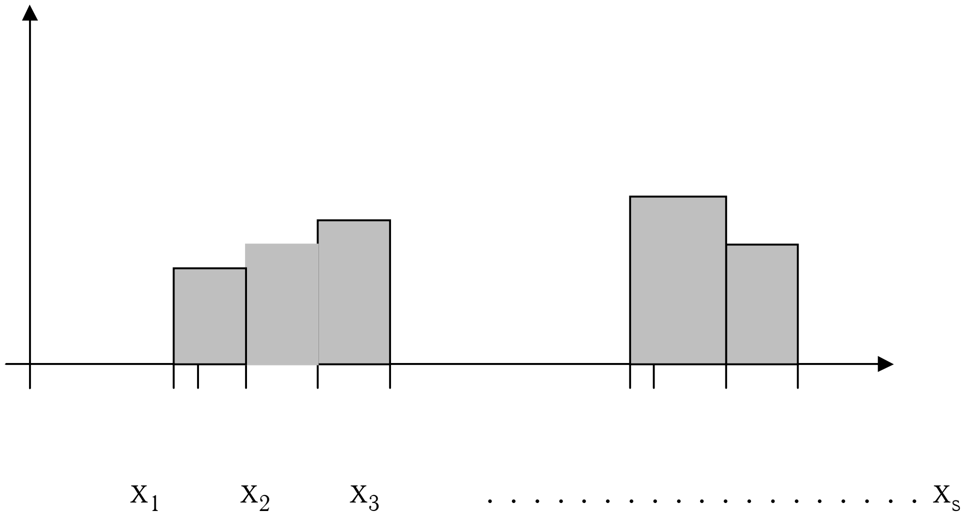
4) $h=x_i-x_{i+1}$

Шундан сўнг гистограмма жадвали тузилади.

Т/р	Вариантлар оралиқлари	Оралиқларга тушувчи частоталар сони	$\frac{a_i}{n}$	$\frac{w_i}{h}=\frac{a_i}{nh}$
1	x_1-x_2	a_1	$\frac{a_i}{n}$	w_1/h
2	x_2-x_3	a_2	a_2/h	w_2/h
3	x_3-x_4	a_3	a_3/h	w_3/h
..	..	..	..	..
k-1	x_{k-1}-x_k	a_{k-1}	a_{k-1}/n	w_{k-1}/h
..	..	..	..	..
s-1	x_{s-1}-x_s	a_{s-1}	a_{s-1}/n	w_{s-1}/h

Шундан сўнг 2-устунда жойлашган $x_1,x_2,..,x_s$ ларни ОХ ўқига жойлаштириб, 4-устунда жойлашган сонларни ОУ ўқига жойлаштириб, сўнгра ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг кесишишидан ҳосил бўлган тўртбурчакларни штрихлаб чиқсак, ҳосил бўлган тўртбурчаклар тўпламини частоталар гистограммаси деб аталади.

2-устунни ОХ ўқига жойлаштириб, 5-устунда жойлашган сонларни ОУ ўқига жойлаштириб, сўнгра ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг кесишишидан ҳосил бўлган тўртбурчакларни штрихласак, ҳосил бўлган 4 бурчаклар тўпламини нисбий частоталар гистограммаси деб аталади.



Изоҳ: Агар вариантлар орасидаги фарқлар бир хил бўлса, у ҳолда тўғридан-тўғри гистограмма жадвалини тузиб гистограммани қурамиз.

Гистограммадан асосан социологик тадқиқотларда, медицинада ва иқтисодиётда кўп фойдаланилади.

Танланманинг сонли характеристикалари ва уларни ҳисоблаш

Танланманинг ўртача қиймати $\bar{x} = \frac{\sum x_i y_i , a_i}{n}$

Танланманинг дисперсияси: $s_x^2 = \overline{x}^2 - [\bar{x}]^2$.

Ўрта квадратик оғиши $s_x = \sqrt{\overline{x}^2 - [\bar{x}]^2}$.

Вариация коэффициенти: $V = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

3-тартибли ва 4-тартибли марказий эмпирик моментлари

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{s}(x_i - \overline{x})^3 a_i}{n}, \qquad m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4 a_i}{n}$$

Ассимметрия коэффициенти: $A_s = \frac{m_3}{s_x^3}$.

Эксцессия коэффициенти $E_k = \frac{m_4}{s_x^3} - 3$ ларни ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

Сохта нол ва шартли вариатага ўтиш усули:

1. С - сохта нол энг катта частотага тўғри келувчи вариант. Агар энг катта частоталар бир нечта бўлса, у ҳолда сохта нол сифатида уларга мос келувчи исталган бир вариантни танлаб олиш мумкин;
2. $u_i = \frac{x_i - c}{h}$, h вариантлар орасидаги фарқ, яъни

$$h = x_{i+1} - x_i$$
$$\overline{x} = \overline{u}h + c$$

$$\overline{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i a_i}{n}, \quad \overline{u^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 a_i}{n}, \quad \overline{u^k} = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^k a_i}{n}.$$

Ўртача квадратик оғиш: $s_u = \sqrt{\overline{u^2} - [\overline{u}]^2}$,

$$s_x = s_u \cdot h$$

$$m_3^{(u)} = \overline{u^3} - 3\overline{u} \cdot \overline{u^2} + 2(\overline{u})^3$$

$$m_4^{(u)} = \overline{u^4} - 4\overline{u} \cdot \overline{u^3} + 6[\overline{u}]^2 \cdot \overline{u^2} - 3[\overline{u}]^4$$

$$m_3^{(u)} = m_3^{(u)} \cdot h^3, \qquad m_2^{(x)} = m_2^{(u)} \cdot h^2,$$
$$m_4^{(x)} = m_4^{(u)} \cdot h^4, \qquad m_2^{(u)} = \overline{u}^{\,2} - [\overline{u}]^2$$

булар орқали юқоридаги барча танланма сонли характеристикаларини ҳисоблаш мумкин. Танланма характеристикаларнинг ҳисоблашнинг баъзи бир усуллари билан танишамиз.

Танланма характеристикаларини ҳисоблашда йиғиндилар усули. Энг аввало

$$d_1 = a_1 - b_1, \qquad d_2 = a_2 - b_2, \qquad d_3 = a_3 - b_3$$

$$S_1 = a_1 + b_1, \qquad S_2 = a_2 + b_2, \qquad S_3 = a_3 + b_3, \qquad S_4 = a_4 + b_4$$

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \qquad M_2^* = \frac{d_2}{n}, \qquad M_3^* = \frac{d_1 + 6d_2 + 6d_3}{n}, \qquad M_{41}^* = \frac{S_1 + 14S_2 + 36S_3 + 24S_4}{n}$$

ҳисобланади.

$\overline{x} = M_1^* h + c$ - танланманинг ўртача қиймати танланманинг дисперсияси -

$$s_x^2 = m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2.$$

Танланманинг ўртача квадратик оғиши - $s_x = \sqrt{M_3^2 - (M_1^*)^2}\,h$ вариация коэффициенти - $V_x = \frac{s_x}{x} \cdot 100\%$.

3-тартибли марказий моменти -$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3$,

4-тартибли марказий моменти - $m_4 = [M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6(M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4]h^4$

Ассимметрия коэффициенти - $A_s = \frac{m_3}{s_x^3}$

Эксцессия коэффициенти - $E_x = \frac{m_4}{s_x^4} - 3$

Мисол: *c=16, h=2.*

Ушбу жадвал асосида танланма характеристикалари топилсин.

x_i	α_i	$B_1=25$	b_2	b_3	$b_4=0$
12	5	5	5	0	0
14	15	20	0	0	0
16	50	0	0	0	0
18	16	30	0	0	0
20	10	14	18	0	0
22	4	4	4	4	0
	$n=100$	$a_1=48$	$a_2=22$	$a_3=4$	$a_4=0$

$$d_1 = a_1 - b_1 = 23, \qquad d_2 = a_2 - b_2 = 17, \quad d_3 = a_3 - b_3 = 4, \quad d_4 = a_4 - b_4 = 0$$

$$S_1 = a_1 + b_1 = 73, \quad S_2 = a_2 + b_2 = 27, \quad S_3 = a_3 + b_3 = 4, \quad S_4 = a_4 + b_4 = 0$$

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{23}{100} = 0{,}23, \qquad M_2^* = \frac{73+54}{100} = \frac{127}{100},$$

$$M_3^* = \frac{2\cdot 3 + 6\cdot 17 + 6\cdot 4}{100} = \frac{149}{100} = 1{,}49, \qquad M_4^* = \frac{73 + 14\cdot 27 + 36\cdot 4 + 24\cdot 0}{100} = 5{,}95$$

$$\bar{x} = M_1^* b + c = 0{,}23\cdot 2 + 16 = 16{,}46$$

$$s_x^2 = [1{,}27 - 0{,}0529]\cdot 4 = 4{,}868$$

$$s_x = \sqrt{4{,}868} = 2{,}2063$$

$$V_x = \frac{2{,}2063}{16{,}46}\cdot 100\% = 13{,}4\%$$

$$m_3 = [1{,}49 - 3\cdot 0{,}23\cdot 1{,}27 + 2(0{,}23)^3]\cdot 8 = 5{,}104$$

$$A_s = \frac{m_3}{s_x^3} = \frac{5{,}104}{10{,}7397} = 0{,}4752.$$

Статистик баҳолар ва уларнинг турлари

n ҳажмли $(x_1, x_2, .., x_n)$ танланма берилган бўлсин.

1-таъриф. Танланмага боғлиқ бўлган ихтиёрий n аргументли ўлчовли функцияни статистик баҳо деб аталади ва уларни $\hat{\theta}(x_1, x_2, .., x_n)$ ёки $\hat{\theta}_1(x_1, x_2, .., x_n)$, $\hat{\theta}_2(x_1, x_2, .., x_n)$ каби белгиланади.

Масалан:

$$\hat{\theta}(x_1 x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$\hat{\theta}(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$, $\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ статистик баҳоларга мисоллар бўла олади.

θ номаълум параметр бўлсин.

2-таъриф. $\hat{\theta}_n$ n га боғлиқ бўлган статистик баҳо θ номаълум параметр учун силжимаган баҳо деб аталади, агарда $M\hat{\theta}_n = \theta$ бўлса.

3-таъриф. Агар $\hat{\theta}_n$ статистик баҳо учун

$M\hat{\theta}_n < \theta$ ёки $M\hat{\theta}_n > 0$ бўлса, у ҳолда $\hat{\theta}_n$ статистик баҳони θ номаълум параметр учун силжиган баҳо дейилади.

4-таъриф. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\theta}_n=\theta$ ўринли бўлса, у ҳолда $\hat{\theta}_n$ статистик баҳони θ номаълум параметр учун ассимптотик силжимаган баҳо деб аталади.

5-таъриф. θ номаълум параметр учун $\hat{\theta}_{1n}$ ва $\hat{\theta}_{2m}$ статистик баҳолар бўлиб, агарда

$$M(\hat{\theta}_n-\theta)^2<M(\hat{\theta}_{2n}-\theta)^2$$

муносабат бажарилса, $\hat{\theta}_{1n}$ статистик баҳони $\hat{\theta}_{2n}$ статистик баҳога нисбатан θ номаълум параметр учун яхши баҳо деб аталади.

6-таъриф. Агарда ∀ε>0 сон учун n →∞ да ушбу

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|\geq\varepsilon)=0$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\hat{\theta}_n$ статистик баҳони θ номаълум параметр учун асосли баҳо дейилади.

7-таъриф. Агар $n\to\infty$ да $\lim\limits_{n\to\infty}P(\hat{\theta}_n\to\theta)=1$ бўлса, ҳолда $\hat{\theta}_n$ статистик баҳони θ номаълум параметр учун кучли асосли ёки турғун баҳо дейилади.

1-теорема. n ҳажмли $(x_1,x_2,...,x_n)\in N(a,\sigma)$ танланма берилган бўлиб, у нормал тақсимотга бўйсунган бўлсин;

$$\forall a\in R\ \ (\sigma>0,\ \sigma\in R),$$

σ - маълум параметр, a - номаълум, бўлса у ҳолда a номаълум параметр учун

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \overline{x}$$

силжимаган баҳо дейилади.

Исбот: $M\overline{x} = a$

$$M\overline{x} = M\,\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}(Mx_1 + Mx_2 + \ldots + Mx_n) = \frac{1}{n}\cdot na = a$$

2-теорема. n ҳажми $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in N(a, s)$ ган булсин, яъни у нормал тақсимотга бўйсунсин; $\forall a \in R$ $(s > 0,\ s \in R)$

a учун $\overline{x}$ силжимаган баҳо, бўлиб σ - номаълум бўлса, у ҳолда σ^2 учун

$$\overline{s}^{\,2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^2$$

силжиган баҳо бўлади.

Ҳақиқатга максимал яқинлик усули

Статистик баҳоларни қидиришда жуда кўп усуллар мавжуд бўлиб, улардан энг кўп тарқалган ҳақиқатга максимал яқинлик усули деб аталади.

Бу усулнинг моҳияти қуйидагича:

I. текширилаётган тасодифий белгининг зичлик функцияси битта номаълум параметрни ўз ичига олган бўлсин:

1) $f(x,q), \quad x \sim x_k \Rightarrow f(x_k,q),\; k=\overline{1,n}$

2) ўхшашлик функциясини тузамиз: $L(x,q)=\prod_{k=1}^{n} f(x_k,q)$

3) ўхшашлик функциясини логарифмини топамиз: $\ln L=\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k,q)$

4)Номаълум параметр бўйича ҳосила оламиз: $\frac{d}{dq}\ln L=\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(x_k,q)}{f(x_k,q)}$

5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(x_k,q)}{f(x_k,q)}=0$ тенгланиб ечиб, критик нуқталарни аниқлаймиз.

6)Дифференциал тенглама ечимга эга бўлиб, ечим нуқтада максимумга эришса, бу ечимни ҳақиқатга максимал яқинлик усули билан топилган θ номаълум учун статистик баҳо дейилади.

Масалан: $(x_1,x_2,..,x_n)\in B(x,p)=C_n^x\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$ - биномиал тақсимотга мансуб бўлсин. У ҳолда

$$L(x,p)=\prod_{k=1}^{n} C_n^{x_k}\cdot p^{x_k}\cdot(1-p)^{n-x_k} \text{ бўлиб,}$$

$$\ln L=\sum_{k=1}^{n}\ln C_n^{x_k}\cdot p^{x_k}\cdot(1-p)^{n-x_k}=\sum_{k=1} C_n^{x_k}+\sum_{k=1}^{n}\ln p^{x_k}+\sum_{k=1}^{n}(n-x_k)\ln(1-p);$$

$\frac{d}{dp}\ln L=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}x_k-\frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(n-x_k)=0$ бўлади. Бу тенгламани ечиб

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(n-x_k);$$

$$(1-p)\sum_{k=1}^{n} x_k = p\left(n^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = pn^2; \quad \hat{p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n^2} = \frac{\bar{x}}{n}$$ - ни топамиз.

Текшириш осонки, ўхшашлик функцияси $\hat{p} = \dfrac{\bar{x}}{n}$ да максимумга эришади.

II. текширилаётган тасодифий белгининг зичлик функцияси иккита номаълум параметрга боғлиқ бўлсин, бу ҳолда

1. $x \sim x_k, \quad f(x_k, q_1, q_2);$

2. $L(x_1, q_1, q_2) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, q_1, q_2);$

3. $\ln L = \sum_{k=1}^{n} \ln f(x_k, q_1, q_2);$

4. $\dfrac{\partial \ln L}{\partial q_1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f'_{q_1}(x_k, q_1, q_2)}{f(x_k, q_1, q_2)}, \qquad \dfrac{\partial \ln L}{\partial q_2} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f'_{q_2}(x_k, q_1, q_2)}{f(x_k, q_1, q_2)},$

5. $$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial q_1} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f'_{q_1}(x_k, q_1, q_2)}{f(x_k, q_1, q_2)} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial q_2} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f'_{q_2}(x_k, q_1, q_2)}{f(x_k, q_1, q_2)} = 0 \end{cases}$$

Дифференциал тенгламалар, системаси ечимга эга бўлса, унинг ечимини (θ_1, θ_2) номаълум параметрларга нисбатан ҳақиқатга максимал яқинлик усули билан топилган статистик баҳо деб аталади.

Масалан: $(x_1, x_2, ..., x_n) \in f(x, a, s^2) = \dfrac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$ бўлсин. Бу ҳолда

1) $x \sim x_k, \qquad f(x_k, a, s^2) = \dfrac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x_k - a)^2}{2s^2}}$

2) $$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x_k-a)^2}{2s^2}} = \frac{1}{s^n\left(\sqrt{2p}\right)^n} e^{-\frac{1}{2s^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-a)^2} = L(x, a, s^2)$$

3) $$\ln L(x, a, s^2) = \ln s^{-n} + \ln\left(\sqrt{2p}\right)^n - \frac{1}{2s^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 =$$

$$-\frac{n}{2}\ln s^2 - \frac{n}{2}\ln\sqrt{2p} - \frac{1}{2s^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2;$$

4) $$\frac{\partial \ln L}{\partial s^2} = -\frac{n}{2} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^4}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{s^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a),$$

5) $$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - a) = 0 \\ -n + \dfrac{1}{s^2}(x_k - a)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} na = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k, \\ s^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - a)^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{a} = \bar{x} \\ \hat{s}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 \end{cases}$$

шундай қилиб (a, s^2) параметрлар учун $\bar{x}$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$ мос ҳолда статистик баҳолар бўлади.

Энди a ва σ^2 - номаълум параметрлар учун топилган статистик баҳоларнинг lnL ўхшашлик функция максимум қийматга эришишини кўрсатиш қолди, холос.

Бунинг учун математик анализдаги маълум теоремаларга асосан

$$Q = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2 \partial a} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial \sigma^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} \end{vmatrix} > 0$$

эканлигини кўрсаткичи кифоя кўрсатиш осонки,

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2 \partial a} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}{\sigma^4}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} = -\frac{n}{2\sigma^2}$$

Шу сабабли

$$Q = \begin{vmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - a)}{\sigma^4} \\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}{\sigma^4} & -\dfrac{n}{2\sigma^4} \end{vmatrix} = \frac{n^2}{2(\sigma^2)^3} - \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\right]^2 \cdot \frac{1}{(\sigma^2)^4}$$

Топилган a ва σ^2 қийматларини охирги ифодага қўйсак,

$$Q=\frac{n^2\cdot n^3}{2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^3}-\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2 n^4}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^4}$$

га эга бўламиз.

$$\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})=\sum x_i-n\bar{x}=0$$

$$Q=\frac{n^5}{2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^3}-\frac{n^4}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2}=\frac{n^5=2n^4\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^3}=$$

$$=\frac{n^5}{2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^3}>0$$

Энг кичик квадратлар усули

Иккита тасодифий (x,y) белгини бир вақтда қаралса, улар орасидаги статистик муносабат $y=\varphi(x)$, бўлиб φ - номаълум бўлганда, бу статистик муносабатни топиш масаласини кўриб чиқамиз.

Айтайлик (X,Y) миқдорлар орасидаги муносабат қуйидаги жадвал кўринишида берилган бўлса

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

φ - статистик муносабат кузатиш натижалари бўйича топилсин.

I - ҳол $y=kx+b$, k,b - номаълум параметрлар.

$F(k,b)=\sum_{m=1}^{n}(y_m-kx_m-b)^2$ ифодани тузамиз.

$$1)\ \begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial k}=-2\sum_{m=1}^{n}(y_m-kx_m-b)x_m\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=-2\sum_{m=1}^{n}(y_m-kx_m-b)\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\sum_{m=1}^{n}(x_m\ y_m-kx_m^2-bx_m)=0\\ \sum_{m=1}^{n}(y_m-kx_m-b)=0\end{cases}$$

ва бу системани ечамиз

$$\begin{cases}k\sum_{m=1}^{n}x_m^2+b\sum_{m=1}^{n}x_m=\sum_{m=1}^{n}x_my_m\\ k\sum_{m=1}^{n}x_m+nb=\sum_{m=1}^{n}y_m\end{cases}$$

$$\begin{cases}k\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}x_m^2+b\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}x_m=\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}x_my_m\\ k\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}x_m+b=\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}y_m\end{cases},\qquad \begin{cases}k\overline{x}^2+b\overline{x}=\overline{xy}\\ k\overline{x}+b=\overline{y}\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\overline{x}^2 & \overline{x}\\ \overline{x} & 1\end{vmatrix}=\overline{x}^2-[\overline{x}]^2$$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}\overline{xy} & \overline{x}\\ \overline{y} & 1\end{vmatrix}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y},\qquad \Delta_b=\begin{vmatrix}\overline{x}^2 & \overline{xy}\\ \overline{x} & \overline{y}\end{vmatrix}=\overline{x}^2\overline{y}-\overline{xy}\cdot\overline{x}$$

$$b=\overline{y}-k\overline{x}=\overline{y}-\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x}^2-[\overline{x}]^2}\cdot\overline{x},$$

$$y = kx + b = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x}^2 - [\overline{x}]^2} x + \overline{y} - \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x}^2 - [\overline{x}]^2} \cdot \overline{x};$$

$$y - \overline{y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x}^2 - [\overline{x}]^2} (x - \overline{x}).$$

$r_{y/x} = k\frac{sy}{sx}$ ни y -ни x га нисбатан, $r_{x/y} = k\frac{sx}{sy}$ x ни y га нисбатан регрессия коэффициентлари дейилади. .

$$s_x = \sqrt{\overline{x}^2 - [\overline{x}]^2}, \qquad s_y = \sqrt{\overline{y}^2 - [\overline{y}]^2}$$

$$y_x - \overline{y} = r_{y/x}(x - \overline{x}),$$

$$x_y - \overline{x} = r_{x/y}(y - \overline{y}).$$

II. $y=ax^2+bx+c$ бўлган ҳолни қараймиз.

$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)$ ифодани тузамиз.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i, \\ \frac{\partial F}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

системанинг кўриниши

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$ бўлади.

Ушбу жадвалдан фойдаланиб

x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$x_i^3 y_i$	$x_i^4 y_i$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_ш^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 y_i$

Системани a,b,c га нисбатан Гаусс методи билан ечиб, a,b,c номаълум параметрларнинг қийматини топиб $y=ax^2+bx+c$ боғлиқликни аниқ кўринишини топамиз.

Нормал тақсимот

Ҳаётда энг кўп учрайдиган тақсимотлардан бири зичлик функцияси

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}},$$ $-a<x<\infty$, a - ихтиёрий ҳақиқий сон, $s>0$,

бўлган нормал тақсимот деб аталади. Унинг баъзи хоссаларини кўрамиз.

1. $D(f)=(-¥;¥)$.
2. $E(f)=[0;\infty)$ графиги OX ўқидан юқорида жойлашган.
3. $f'(x)=-\frac{1}{s\sqrt{2p}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}\cdot\frac{(x-a)}{s^2}=0;\ (x-a)=0,\ x=a$ критик нуқтада максимумга эришади.

$$f''(x)=-\frac{1}{s^3\sqrt{2p}}\left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}+e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}\left(-\frac{x-a}{s^2}\right)(x-a)\right)=$$

$$=-\frac{1}{s^3\sqrt{2p}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}\left(1-\frac{(x-a)^2}{s^2}\right)=\frac{1}{s^3\sqrt{2p}}\left(\frac{(x-a)^2}{s^2}-1\right),$$

$$f(a)=\frac{1}{s\sqrt{2p}}$$

4. $x=a$ ўқига нисбатан симметрик.
5. $f''(x)=\frac{1}{s^3\sqrt{2p}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}\left(\frac{(x-a)^2}{s^2}-1\right)=0$ эгилиш нуқталарини топамиз:

$$x_1=a-s,\quad x_2=a+s\ .$$

$$y_1=\frac{1}{s\sqrt{2p}}e^{-\frac{1}{2}},\qquad y_2=\frac{1}{s\sqrt{2p}}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(a-s,\frac{1}{s\sqrt{2pe}}\right);\left(a+s,\frac{1}{s\sqrt{2pe}}\right)$$

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

7. $MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \dfrac{1}{s\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - a + a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}dx = J_1 + J_2.$

$$J_1=\frac{1}{s\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}dx=\left\{\frac{x-a}{s}=t,\ dx=s\,dt\right\}=\frac{1}{s\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s\,t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot s\,dt=$$

$$=\frac{s}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$$

$$J_2=\frac{a}{s\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}s\,dt=\frac{a}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{a}{\sqrt{2p}}\sqrt{2p}=a$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2p};\ \int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{\sqrt{2p}}{2}$ (Пуассон интегралига асосан)

$$M(X)=a$$

8. $s^2 = Dx$

$m_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k\dfrac{1}{s\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}\cdot dx;$ x-a=t деб олсак,

$$m_k=\frac{s_k}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^ke^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (1)$$

k- тоқ бўлса m_k=0, k - жуфт бўлса.

$$m_k=\frac{s_k}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{k-1}\left(te^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)\Rightarrow\left\langle u=t^{k-1},dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ du=(k-1)t^{k-2}dt,v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\right\rangle\Rightarrow$$

$$\frac{s^k}{\sqrt{2p}}\left(-t^{k-1}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot(k-1)t^{k-2}dt=\frac{s_k}{\sqrt{2p}}(k-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{k-2}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (2)$$

$$m_{k-2} = \frac{s^{k-2}}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (3)$$

$$\frac{m_k}{m_{k-2}} = \frac{s_{k-2}}{\sqrt{2p}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{s_k} = \frac{1}{s^2 (k-1)} \qquad (4)$$

$$m_k = m_{k-1} \cdot s^2 (k-1); \qquad m_2 = s^2 = DX;$$

$m_6 = m_4 \cdot 5s^2 = 15s^6, \ldots,,\ a = 0,\ s = 1$, бўлса, стандарт нормал тақсимот дейилади.

$$m_k = \begin{cases} 0, & k - \text{ток} \quad \text{булса} \\ (k-1)m_{k-2}; & k - \text{жуфт} \quad \text{булса} \end{cases}$$

$$m_2 = 1, \quad m_4 = 3, \quad m_6 = 15 \ldots$$

9. $A_S = \dfrac{m_3}{s^3} = 0, \quad E_k = \dfrac{m_4}{s_4} - 3 = \dfrac{3s^4}{s^4 - 3} = 0$

10. $P(a < x < b) = F(b) - F(a);\ T = \dfrac{x-a}{s},\ t_1 = \dfrac{a-a}{s},\ t_2 = \dfrac{b-a}{s}$

$$P\left(\frac{a-a}{s} < \frac{x-a}{s} < \frac{b-a}{s}\right) = P\left(\frac{a-a}{s} < T < \frac{b-a}{s}\right) =$$
$$= P(t_1 < T < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;\ j(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}},\ j(-t) = -j(t),\quad 0 \le t < 5,\ t \ge 5,\ j(t) = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = P(T < t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2p}}{2};$$

$$\frac{1}{2}+j\,(t_2)=F(t_2);\quad F(t_1)=\frac{1}{2}+j\,(t_1);\ P(t_1<T<t_2)=j\,(t_2)-j\,(t_1);$$

$$P\left(\frac{a-a}{s}<\frac{x-a}{s}<\frac{b-a}{s}\right)=j\left(\frac{b\cdot a}{s}\right)-j\left(\frac{a-a}{s}\right),$$

φ(x), ф(x) нинг қийматлари масхус Лаплас функциясининг қийматлари жадвалдан фойдаланиб топилади.

с²(хи) квадрат тақсимот

Математик статистикада критерий тузишда хи -квадрат тақсимот катта ахамиятга эга.

Айтайлик, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар стандарт нормал тақсимотга муносиб бўлиб,

$$c_m^2=\sum_{л=1}^{m}x_л^2 \quad \text{бўлсин} \qquad (1)$$

(1) тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини Хи квадрат тақсимот дейилади. Бу ерда $\xi_{1,}$ ξ_2, ,ξ_n лар боғлиқсиз стандарт нормал тақсимланган тасодифий миқдорлар, яъни $\xi_i \in N(0,1)$

Маълумки, гамма тақсимотнинг зичлик функцияси

$$f(x,a,l)=\begin{cases}\dfrac{a^{l}}{\Gamma(l)}x^{l-1}\cdot e^{-ax}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

бу ерда,

$$\Gamma(l)=\int_0^{\infty}x^{l-1}\cdot e^{-x}dx$$

$$\int_0^\infty x^{l-1} \cdot e^{-bx} dx = \left\langle bx = y,\ \ x = \frac{y}{b},\ \ dx = \frac{dy}{b} \right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{l-1}}{b^{l-1}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{dy}{b} = b^{-l}\,\Gamma(l) \qquad (2)$$

$$f(t, a, l) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot f(x, a, l) dx = \frac{a^l}{\Gamma(l)} \int_0^\infty x^{l-1} \cdot e^{-(a-it)x} \cdot dx =$$

$$= \frac{a^l}{\Gamma(l)} \lim_{M \to \infty} \int_0^N x^{l-1} \cdot e^{-(a-it)x} dx = \left\langle (a - it)x = y,\ \ x = \frac{y}{a - it},\ \ dx = \frac{dy}{a - it} \right\rangle =$$

$$= \frac{a^l}{\Gamma(l)} \cdot \frac{1}{(a - it)^l} \int_0^\infty y^{l-1} \cdot e^{-y} dy = \left(\frac{a - it}{a} \right)^{-l} \cdot \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(l)} = \left(\frac{a - it}{a} \right)^{-l}$$

Гамма тақсимотнинг характеристик функцияси

$$\left(1 - \frac{it}{a} \right)^{-l} \qquad (3)$$

Агар $n = 1$, бўлса, $c_1^2 = x_1^2$, $(x \geq 0)$ бўлиб, унинг тақсимот функцияси

$$F_{c_1}(x) = P\{c_1^2 < x\} = P\{x_1^2 < x\} = P\left(|x_1| < \sqrt{x}\right) = P\left(-\sqrt{x} < x_1 < \sqrt{x}\right) =$$

$$= \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right) = 2\Phi(\sqrt{x})$$

$$\frac{d}{dx}F_{c_1}(x) = 2\Phi'\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}}\, y^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_{c_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\, x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \qquad (4)$$

унинг зичлик функциясидир.

Гамма тақсимотнинг характеристик функциясини зичлик функцияси билан таққосласак;

$$f_{c_1^2}(x) = f\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad (5)$$

(5) ва (3) дан, характеристик функциясини ҳам топиш мумкин:

$$f\left(t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f_{c_1^2}(x) = \left(1 - \frac{it}{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

$$f_{c_n^2}(t) = \left[f_{c_1^2}(t)\right]^n = \left[\left(1 - \frac{it}{1/2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^n = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

$$f_{c_n^2}(x) = f\left(x, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$f_{c_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x \geq 0$$

$$F_{c_n^2}(x) = \int_0^x f_{c_n^2}(y)dy \qquad (7)$$

Бу тақсимотнинг қийматларини топишда X^2 тақсимот қийматини топиш жадвалидан фойдаланилади.

Хи квадрат тақсимотнинг зичлик функциясига ёки тақсимот функциясига назар солсак, уни фақатгина танланма n-га боғлиқлиги билан бошқа критериялардан тубдан фарқ қилади. Шу сабабли уни универсал критерия деб ҳам юритилади.

Кўп ҳолларда c_n^2 тақсимот ўрнига χ_n нинг тақсимоти ишлатилади:

$$c_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

зичлик функция хоссасига кўра,

$$f_{c_n^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_{c_n}\left(\sqrt{x}\right), \quad \sqrt{x} = y, \quad x = y^2$$

$$f_{c_n}(y) = 2y \cdot f_{c_n^2}(y^2) = 2y \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (y^2)^{\frac{n}{3}-1} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n-1} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$f_{c_n}(x) = \frac{x^{n-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{n}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \qquad x \geq 0$$

Стюдент тақсимоти

Математик статистикадаги яна бир энг кўп қўлланиладиган тақсимотлардан бири Стюдент тақсимотидир.

Қуйидаги тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини стюдент тақсимоти дейилади:

$$t_n = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}} \qquad (1)$$

$\xi_0,\ \xi_1,\ldots,\ \xi_т$ боғлиқсиз ва N(0,1) га тегишли

$$c_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \Rightarrow t_n = \frac{x_0\sqrt{n}}{c_n},$$

$x_0\sqrt{n}$ ва c_n боғлиқсиз тасодифий миқдорлар.

$$M(x_0\sqrt{n}) = \sqrt{n}M(x_0) = \sqrt{n}\cdot 0 = 0$$

$$D\left(x_0\sqrt{n}\right) = nD(x_0) = n = s^2, \qquad s = \sqrt{n}$$

$x_0\sqrt{n} \in N\left(0,\sqrt{n}\right)$ параметрли тақсимотнинг зичлик функцияси.

τ_n нинг тақсимот фунциясини топамиз:

$$P(t_n < x) = S_k(x) = P\left(\frac{x_0\sqrt{n}}{c_n} < x\right) = \iint\limits_{(u,v):\frac{u}{v}<x,\ v>0} f(u,v)dudv = \iint\limits_{\frac{u}{v}<x, v>0} f_{x_0\sqrt{n}}(u)\cdot f_{c_n}(v)dudv =$$

$$= \left\langle f_{x_0\sqrt{n}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2n}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2pn}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\iint\limits_{\frac{u}{v}<x, v>0} e^{-\frac{u^2}{n}}\cdot v^{n-1}\cdot e^{-\frac{v^2}{2}}dudv =$$

$$= a_n \iint\limits_{\frac{u}{v}<x, v>0} v^{n-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{n}-v^2\right)}\cdot dudv \qquad (7)$$

$(u,v)\to(y,z), \quad u=yz, \quad v=z$ алмаштириш бажарсак

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=1$$

$$J=\begin{vmatrix} z & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=z$$

$$S_n(x)=a_n \iint\limits_{y<x,z>0} z^{n-1}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{y^2}{n}+1\right)}\cdot z\cdot dydz=a_n \iint\limits_{y<x,z>0} z^{n}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{y^2}{n}+1\right)}dydz=$$

$$=\left\{z\sqrt{\frac{y^2}{n}+1}=t, \quad dz=\frac{dt}{\sqrt{\frac{y^2}{n}+1}}\right\}=a_n\int_{-\infty}^{x}dy\int_0^{\infty}\frac{t^n}{\left(\frac{y^2}{n}+1\right)^{\frac{n}{2}}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\left(\frac{y^2}{n}+1\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=a_n\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{y^2}{b}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}dy\int_0^{\infty}t^n\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left\{\frac{t^2}{2}=q, \quad dt=\frac{1}{\sqrt{2q}}dq\right\}=$$

$$=a_n\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{y^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}dy\int_0^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cdot q^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-q}\cdot\frac{dq}{2q}=$$

$$=2^{\frac{n-1}{2}}\cdot a_n\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{y^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}\cdot dy\int_0^{\infty}q^{\frac{n-1}{2}}\cdot e^{-q}\cdot dq=$$

$$=\frac{2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2pn}\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{y^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}dy, \qquad \Bigg|\int_0^{\infty}q^{\frac{n-1}{2}}\cdot e^{-q}dq=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right);$$

$$s_n(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{y^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Стюдент тақсимотининг зичлик функцияси бўлади.

$$F_{t_n}(x) = S_n(x) = \int_{-\infty}^{x} s_n(y)dy; \qquad S_n(x) = \int_{-\infty}^{x} s_n(y)dy.$$

1-лемма: $n \to \infty$ да $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ га интилади.

2-лемма: $n \to \infty$ да $S_n(y) \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \varphi(y)$

Стюдент тақсимоти қийматлари Стюдент тақсимоти қийматлари жадвалидан, α-қийматдорлик даражаси ва $(n\text{-}1)$ - озодлик даражасига боғлиқ ҳолда топилади.

Фишер тақсимоти.

Математик статистикада энг кўп қўлланиладиган тақсимотлардан яна бири бири Фишер тақсимоти деб аталади.

$$F_{pq} = \frac{\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P} x_k^2}{\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} h_k^2} \qquad (1)$$

ни Фишер статистикаси ёки Фишер тақсимоти билан дейилади, бу ерда ξ_k,η_k лар боғлиқсиз стандарт нормал тақсимотга эга бўлган тасодифий миқдорлар.

$$c_p^2=\sum_{k=1}^{P}x_k^2, \qquad c_q^2=\sum_{k=1}^{q}h_k^2, \qquad F_{pq}=\frac{q}{p}\cdot\frac{c_p^2}{c_q^2} \tag{2}$$

Соддалик учун (2)ни $\frac{p}{q}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{p}{q}F_{pq}=\frac{c_p^2}{c_q^2} \tag{3}$$

ва унинг тақсимот функциясини топишга ҳаракат қиламиз

$$P\left(\frac{p}{q}F_{pq}<x\right)=P\left(\frac{c_p^2}{c_q^2}<x\right)=\iint\limits_{\frac{u}{v}<x,\ u\ge0,v>0} f(u,v)dudv=$$

$$=\iint\limits_{\frac{u}{v}<x,\ u\ge0,v>0} f_{c_p^2}(u)\cdot f_{c_q^2}(v)dudv=\frac{1}{2^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\cdot 2^{\frac{q}{2}}\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\iint\limits_{\frac{u}{v}<x,v\ge0,v>0} u^{\frac{p}{2}-1}\cdot e^{-\frac{u}{2}}\cdot v^{\frac{q}{2}-1}\cdot e^{-\frac{v}{2}}dydv=$$

$$=a_{pq}\iint\limits_{\frac{u}{v}<x\ldots v>0} u^{\frac{p}{2}-1}\cdot v^{\frac{q}{2}-1}\cdot e^{-\frac{u+v}{2}}dudv=\left\{u=yz,\ v=z,\ y=\begin{vmatrix} z & y \\ 0 & 1\end{vmatrix}=z\right\}=$$

$$=a_{pq}\iint\limits_{0<y<x,z>0}(yz)^{\frac{p}{2}-1}\cdot z^{\frac{q}{2}-1}\cdot e^{-\frac{z}{2}(y+1)}\cdot zdydz=a_{pq}\int_0^x y^{\frac{p}{2}-1}dy\int_0^\infty z^{\frac{p+q}{2}-1}\cdot e^{-\frac{z}{2}(y+a)}\cdot dz=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&\frac{z(y+1)}{2}=t\\ &dz=\frac{2dt}{y+1}\end{aligned}\right\}=a_{pq}\int_0^x y^{\frac{p}{2}-1}dy\int_0^\infty\frac{2^{\frac{p+q}{2}-1}\cdot t^{\frac{p+q}{2}}}{(y+1)^{\frac{p+q}{2}-1}}\cdot e^{-t}\cdot\frac{2dt}{y+1}=$$

$$
=\frac{2^{\frac{p+q}{2}}\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{2^{\frac{p}{2}}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)2^{\frac{q}{2}}\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^x \frac{y^{\frac{p}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{p+q}{2}}}\,dy=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^x \frac{y^{\frac{p}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{p+q}{2}}}\,dy.
$$

$$
P\left(\frac{p}{q}F_{pq}<x\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^x \frac{y^{\frac{q}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{p+q}{2}}}\,dy.
$$

$$
P\left(F_{pq}<\frac{qx}{p}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^{1\,x/p} \frac{y^{\frac{q}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{p+q}{2}}}\,dy
$$

$$
f_{pq}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{qx}{p}\right)^{\frac{q}{2}-1}}{\left(1+\frac{qx}{p}\right)^{\frac{p+q}{2}}}\cdot\frac{q}{p}=
$$

$$
=\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{q}{2}-1}\cdot p^{\frac{p+q}{2}}\cdot q\cdot q^{\frac{q}{2}}}{(qx+p)^{\frac{p+q}{2}}\cdot p\cdot p^{\frac{q}{2}}}=\frac{p^{\frac{p}{2}}\cdot q^{\frac{q}{2}}\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{q}{2}-1}}{(p+qx)^{\frac{p+q}{2}}}
$$

$$
f_{pq}(x)=\frac{p^{\frac{p}{2}}\cdot q^{\frac{q}{2}}\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\frac{q}{2}-1}}{(p+qx)^{\frac{p+q}{2}}}
$$

зичлик функцияси

$F_{pq}(x)=\int\limits_0^x f_{pq}(y)dy$ - эса унинг тақсимот функцияси бўлади.

$$F_{pq}=\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_p^2}{x_1^2+...+x_2^2+h_1^2+...+h_q^2}=\frac{c_p^2}{c_p^2+c_q^2} \qquad (*)$$

$\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$ параметрли В-бета тақсимот;

$$\frac{1}{B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}\cdot x^{\frac{p}{2}-1}\cdot(1-x)^{\frac{q}{2}-1}, \quad 0\le x\le 1,$$

$(*)$ тақсимот зичлик функцияси

$$B(a,b)=\int\limits_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$$

Барча ўрганилган тақсимотлар жадваллаштирилган бўлиб, уларнинг қийматлари жадвалдан топилади ҳамда бу статистикалар фақатгина универсал, кузатиш натижалар сонигагина боғлиқлиги туфайли параметрлар учун ишончлилик оралиқларини қуришда ва статистик гипотезаларни текширишда муҳим рол ўйнайди.

Ишончлилик оралиқлари

Кўпгина масалаларда номаълум параметрлар учун статистик баҳоларни аниқ топиш имкони бўлмайди. Бу ҳолларда маълум бир ишончли эҳтимол билан номаълум параметрнинг қийматларини маълум бир оралиққа тегишлилигини айтиш мумкинми деган савол қўйилиб, номаълум параметр учун ишончлилик оралиғини қуриш тавсия этилади. Бу усул қуйидагича. Энг аввало ишончли эҳтимоллиги γ масаланинг шартига қараб танланади. Кўпинча, γ=0.8, 0.85, 0.90, 0.95, 0.99 қийматлар олинади.

θ - номаълум параметр бўлсиб, $\hat{q}$- унинг статистик баҳоси бўлсин. ∀ε >0 учун қуйидаги

$$P(|q - \hat{q}_n| < e) = g \qquad (1)$$

функционал тенгламани ечишга тўғри келади. Функционал тенглама ечимга эга бўлса (1) қуйидаги (2) тенгликка тенг кучли:

$$P(\hat{q}_n - e < q < \hat{q}_n + e) = g \qquad (2)$$

Бундан $q \in (\hat{q}_n - e;\ \hat{q}_n + e) - q$ номаълум параметр учун ишончлилик оралиғи деб аталади.

Масалан: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ танланма берилган бўлиб, $N(a, s^2)$ нормал тақсимотга бўйсунган бўлсин, σ^2 - маьлум, a - номаълум параметр бўлсин.

γ - ишончли эҳтимол билан a номаълум параметр учун ишончлилик оралиқлари топилсин:

$$t = \frac{|\bar{x} - a|\sqrt{n}}{s}, \qquad P(t < e) = g \Rightarrow P\left(\frac{|\bar{x} - a|\sqrt{n}}{s} < e\right) = g$$

$$\frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\frac{s}{\sqrt{n}}e}^{\frac{s}{\sqrt{n}}e} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = g\,,$$

$$\frac{2}{\sqrt{2p}} \int_0^{\frac{s}{\sqrt{n}}e} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = g\,, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ эканлигини эътиборга олсак

$$\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}e\right)=\frac{g}{2}$$

$\Phi(t_g)=\dfrac{g}{2}$, t_g - жадвалдан топилади.

$$P\left(-\frac{se}{\sqrt{n}}t_g+\bar{x}<a<\frac{se}{\sqrt{n}}t_g+\bar{x}\right)=g$$

$a\in\left(\bar{x}-\dfrac{se}{\sqrt{n}}t_g,\quad \bar{x}+\dfrac{se}{\sqrt{n}}t_g\right)$ ишончлилик оралиғи бўлади.

Фараз қилайлик, σ^2 - номаълум бўлсин, a ни баҳолаймиз: бунинг учун қуйидаги

$$T=\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{s_1}$$

тасодифий миқдорни қараймиз, бу ерда $s_1=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\ s$. Бу ҳолда T озодлик даражаси n-1 бўлган Стюдент қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, унинг зичлик функцияси

$$S(x,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{p\,(n-1)}\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

бўлади.

S(x,n) функция x бўйича жуфт бўлгани учун

$$P\left\{\left|\frac{\overline{x}-a}{\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}}}\right|<d_x\right\}=2\int_0^{s_x} S(t,n)dt=v \quad \text{ёки}$$

$$P\left(\overline{x}-d_x\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+d_x\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}}\right)=v$$

Демак, ν эҳтимол билан a-параметр учун ишончлилик

$$\overline{x}-d_x\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+d_v\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}} \quad \text{О}$$

оралиғи бўлади.

$(x_1 x_2 \ldots x_n)$ танланма нормал қонун бўйича тақсимланган бўлиб, у ҳолда тақсимотнинг s_1^2 параметри учун ишончлилик оралиғини тузайлик.

Бизга маълумки,

$$\frac{1}{s_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{ns^2}{s_1^2} \quad \text{О}$$

тасодифий миқдор озодлик даражаси n-1 бўлган χ^2 қонун билан тақсимланган тасодифий миқдор бўлади. Берилган ν ишончлилик эҳтимол бўйича c_1^2, c_2^2 ларни

$$\int_{c_1^2}^{c_2^2} k(n-1,x)dx=v$$

тенгламадан топамиз. Бу ерда $k(n-1,x)$-χ^2 тақсимотнинг зичлик функцияси. c_1^2 *ва* c_2^2 ларни аниқлаш учун қўшимча

$$\int_0^{c_1^2} k(n-1,x)dx = \frac{1-v}{2}, \qquad \int_{c_2^2}^{\infty} k(n-1,x)dx = \frac{1-v}{2}$$

шартлар бажарилишини талаб қиламиз, у ҳолда ν ва n маълум бўлганда χ^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясига қараб, c_1^2, c_2^2 лар аниқланади. Натижада

$$P\left(c_1^2 < \frac{ns^2}{s_1^2} < c_2^2\right) = \int_{c_1^2}^{c_2^2} k(n-1,x)dx = v$$

Демак, ушбу $\left(\frac{ns^2}{c_2^2}, \frac{ns^2}{c_1^2}\right)$ оралиқ s_1^2 учун ν эҳтимол билан ишончлилик оралиғи бўлади.

Статистик гипотезалар

Кўп ҳолларда ξ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси номаълум бўлиб, бу тақсимот функцияни ξ устидан олиб борилган кузатиш асосида ҳосил қилинган $x_1, x_2, .., x_n$ миқдорлар ёрдамида аниқлаш масаласи қўйилади. 1-жадвалда келтирилган Норин-Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлигининг эмпирик тақсимот функциясини тузиш мумкин. Шу асосда Норин-Қорадарё оралиғида сизот сувлар чуқурлиги қандай тақсимотга бўйсунишини аниқлаш масаласи жуда муҳимдир.

Номаълум тақсимотнинг кўриниши ёки маълум тақсимотларнинг параметрлари ҳақида қилинган фаразлар статистик гипотезалар дейилади. Масалан, қуйидаги гипотезалар статистик гипотеза бўлади: 1) Норин-Қорадарё оралиғидаги сизот сувларнинг чуқурлиги нормал қонун бўйича тақсимланган; 2) нормал қонунга бўйсунадиган иккита танланманинг дисперсиялари тенг. Биринчи ҳолда номаълум тақсимот функция тўғрисида, иккинчисида эса маълум тақсимотнинг номаълум параметри ҳақида гипотеза олдинга сурилади. Олдинга сурилган гипотеза текшириш натижасида қабул қилиниши ёки рад этилиши мумкин. Асосий гипотезадан ташқари қарама-қарши гипотеза ҳам олдинга сурилади. Асосий гипотеза деб илгари сурилган H_0 гипотезага, конкурент (альтернатив) гипотеза деб, асосий гипотезага зид бўлган H_1 гипотезага айтилади. Масалан, асосий гипотеза деб «Норин-Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги нормал қонунга бўйсунади» деган гипотеза олинсин. Бу ҳолда:

$$H_0 : F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du ,$$

$$H_1 : F(x) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

Фақат битта даъвони ўз ичига олган гипотеза оддий гипотеза, биттадан ортиқ сондаги даъволарни ўз ичига олган гипотезани мураккаб гипотеза дейилади. Гипотеза олдинга сурилгандан сўнг уни текшириш керак бўлади, кузатиш натижалари гипотезани тасдиқласа, гипотеза қабул қилинади, акс ҳолда эса рад этилади.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ -кузатиш натижалари бўлсин. Бу сонларни R^n фазо нуқтасининг координаталари деб қарашимиз мумкин. R_n ни кесишмайдиган иккита R_{n1} ва R_{n2} қисмларга ажратамиз:

$R_n = R_{n_1} \cup R_{n_1} \cap R_{n_2} = \emptyset$. Агар $(x_1, \ldots, x_n) \in R_{n1}$ бўлса, гипотеза қабул қилинади, агар $(x_1, \ldots, x_n) \in R_{n2}$ бўлса, гипотеза рад этилади.

R_{n2} тўплам критик соҳа дейилади. Демак, гипотезани текшириш қоидаси критик соҳани танлашга тенг кучлидир. $R_{кр}$ критик нуқта деб критик соҳани гипотезанинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқтага айтилади. Агар тўғри гипотеза рад этилса, қилинган хатоликни биринчи тур хатолик, агар нотўғри гипотеза қабул қилинса, қилинган хатолик иккинчи тур хатолик дейилади. Демак, $x_1,x_2...,x_n$ лар R_{n2} соҳага тегишли бўлса, биринчи тур хатоликка йўл қўйилади. Агар критик соҳа берилган бўлса, у ҳолда биринчи ва иккинчи тур хатоликларнинг эҳтимолини ҳисоблаш мумкин. Бу ҳақда биз тўхталиб ўтирмаймиз.

Айтайлик, ξ тасодифий миқдорнинг номаълум $F_x(x)$ тақсимот функцияси сифатида $F(x)$қуйидаги гипотезалар берилган деб қабул этайлик, яъни

$$H_0 : F_x(x) = F(x); \qquad H_1 : F_x(x) \neq F(x)$$

Шу гипотезани текшириш талаб қилинади. Тажрибада кузатилган $x_1,x_2,...,x_n$ миқдорларни k та бўлакка ажратамиз ва

$$n_1,n_2,...,n_k \qquad (1)$$

частоталарни тузамиз. Шу билан бирга бирор мулоҳаза асосида

$$n_1^*, n_2^*, \; ...., n_k^* \qquad (2)$$

назарий частоталар аниқланган бўлсин. Агар бу иккала қаторнинг бир-биридан фарқи кичик бўлса, у ҳолда танланманинг тақсимот функцияси сифатида (2) частоталарнинг тақсимот функциясини қабул қилиш мумкин. Кўпинча, $F(x)$ гипотетик тақсимот функцияга асосланиб n_i^* топилади, чунки $P_i = \int_{a_i}^{b_i} dF(x)$, бу ерда $[a_i, b_i]$ - i - интервал, $n_i^* = nP_i$, n-танланма ҳажми. Энди

$$\chi^2_{кузат} = \sum_{ш=1}^{л} \frac{(n_i - n_i^*)}{n_i^*} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i} \qquad (3)$$

миқдорни тузамиз, у ҳолда $\chi^2_{кузат}$ миқдор $n \to \infty$ да озодлик даражаси k-p-1 бўлган χ^2 тақсимот бўйича тақсимланган бўлади, бу ерда p-$F(x)$ тақсимот функциянинг параметрлари сони. Масалан, нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор учун $p=2$., Пуассон қонуни ва экспоненциал қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдорлар учун $p=1$.

$F(x)$ гипотетик тақсимот функцияга асосан (3) дан $\chi^2_{кузат}$ топилади ва сўнгра қийматдорлик даражаси деб аталган α эҳтимол ва озодлик даражаси бўйича иловадаги жадвалга асосан $\chi^2_{кр}$ аниқланади. Агар

$$P(\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}) \geq \alpha$$

тенгсизлик бажарилса, H_0 гипотеза қабул қилинади ва $F(x)$ нинг α, σ^2 параметрлари сифатида $\bar{x}$, $\bar{\sigma}^2$ қабул қилинади, акс ҳолда H_1 гипотеза қабул қилинади.

Практикада деярли $nP_i \geq 10$ бўлган ҳолда χ^2 мезон (критерий)-Пирсон мезони ишлатилади. Кўп ҳолларда қийматдорлик даражаси $\alpha=0{,}8$; $\alpha=0{,}9$; $\alpha=0{,}95$ деб олинади.

Мисол. 2-жадвалда келтирилган танланманинг тақсимоти қийматдорлик даражаси $\alpha=0{,}95$ бўлганда нормал қонунга интилиш-интилмаслиги текширилсин.

Ечиш. Пирсоннинг χ^2 мезонидан фойдаланамиз. Фараз қилайлик, Норин-Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги нормал қонун бўйича тақсимланган ва $Mx \approx \bar{x}$, $Dx \approx \sigma_1^2$ бўлсин. Маълумки,

$k = 10;\ \bar{x} = 1{,}96;\ s_1^2 = 0{,}3136$. Иловадаги 1-жадвалдан фойдаланиш мақсадида $\frac{x_i - \bar{x}}{s_1}$ алмаштириб бажариш, 2-жадвалдан

$$n_i^* = nP_i = n\int_{a_i}^{b_i} d\Phi(x)$$

лигини эътиборга олган ҳолда, 6-жадвални ҳосил қиламиз.

Частота	2,0214 1,0635	1,635 1,248	1,248 0,862	0,862 0,476	0,476 0.089	0,089 0,297	0,297 0,683	0,683 1,070	1,070 1,456	1,456 1,842
n_i	3	6	15	25	15	13	12	9	12	10
	3,588	5,48	10,716	14,484	17,82	18,456	16,056	12,72	8,424	4,704
	0,588	0,52	4,284	10,516	2,82	5,456	4,056	3,72	3,576	5,296
	0,096	0,05	1,713	7,634	0,441	1,612	1,025	1,084	1,518	5,496

6-жадвалдан $\chi^2_{кузат}$=20,669, иловадаги 5-жадвалдан α=0,95 ва озодлик даражаси v=7 бўлган ҳолда критик нуқта 2,17 га тенг, демак,

$$\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}.$$

Бу эса $H_0 : F(x)=\Phi(x)$ гипотезани рад қилишга асос бўлади. Баъзи ҳолларда

$$t_{\chi^2} = \frac{|\chi^2 - v|}{\sqrt{2v}}$$

формуладан фойдаланиб, n_i нинг n_i^* га яқинлигини аниқлаш мумкин, бу ерда v - c^2 нинг озодлик даражаси. Агар t_{c^2} ифода 3 дан кичик бўлса, гипотеза α эҳтимоллик билан қабул қилинади, акс ҳолда гипотеза рад этилади. Юқоридаги мисол учун $t_{c^2} > 3$ лигини текшириб кўринг.

Бу эса яна бир бор Норин-Қорадарё оралиғидаги сизот сувлари чуқурлиги тақсимоти нормал қонунга бўйсунмаслигини кўрсатади, лекин Пирсон эгри чизиқлари усулида Норин-Қорадарё оралиғидаги сизот сувлар чуқурлиги тақсимотининг зичлик функцияси

$$y = 0,7 \cdot \left(1 + \frac{x}{3,25}\right)^{10,62} \cdot \left(1 - \frac{x}{1,87}\right)^{5,67}$$

дан иборатлиги кўрсатилган.

Олдинги бобдаги 4-§ да келтирилган А.Н.Колмогоров теоремаси Колмогоров мослик (мувофиқлик) мезонининг асоси ҳисобланади. $F(x)=F_0(x)$ гипотетик тақсимот функция бўлсин ва кузатиш натижалари $x_1,x_2,\ldots,x_n$ га асосланиб, $F_n(x)$ эмпирик тақсимот функция қурилган бўлсин. Энди

$$D_n = \sup_x |F_0(x) - F_n(x)|$$

дейлик. Сўнгра α муҳимлилик даражаси берилиб, $K=K(x)$ тақсимот функциянинг жадвалидан $K(l_a) = a$ тенгликни қаноатлантирадиган λ_α топилади. Агар D_n ушбу $\sqrt{n}D_n \pounds l_a$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $F_n(x)$ билан $F_0\ (x)$ ўртасидаги фарқ кузатиш натижаларининг тасодифийлик хусусияти туфайли дейилиб, H_0 гипотезанинг эксперимент билан мос (мувофиқ) келиши тан олинади, акс ҳолда H_0 гипотеза инкор этилади.

ҚИЙМАТДОРЛИК ДАРАЖАСИ ВА КРИТЕРИЙ ҚУВВАТИ

H_0: $\theta=\theta_0$ ва муқобил H_1 : $\theta = \theta_1$ содда асосий гипотезаларни қараймиз. Ҳар бир S-критерия билан икки тур хатоликни боғланган бўлади. биринчи тур хатолик деганда асосий гипотеза ўринли бўлиб H_0 ни инкор этгандаги хатоликни тушунамиз. Иккита тур хатолик деганда муқобил гипотеза H_1 ўринли бўлиб, асосий гипотеза H_0 қабул қилиш натижасида ҳосил бўлган хатоликни тушунамиз.

Агар

$$P_i(B) = \int_B f(x,q_i)dx, \quad (i = 0,1) \qquad (1)$$

деб қабул қилсак, S критерия учун биринчи тур хатоликнинг эҳтимоллиги

$$a = P_0(S), \qquad (2)$$

иккинчи тур хатолик эса

$$b = P_1(\bar{S}) \qquad (3)$$

га тенг бўлади. бу ерда $\bar{S} = X \setminus S$

У ҳолда асосий гипотеза H_0 бўлиб, H_1 - муқобил гипотеза нисбатан S-критерийни қуриш масаласини қуйидагича ҳал қилиш мумкин:

Биринчи тур хатолик α-ни S-критериянинг қийматдорлик даражаси, $W=W(S;\theta)$ ни эса S-критерийнинг қувват функцияси деб аталади ва уни

$$W(S;q) = \int_S f(x,q)dx \qquad (5)$$

каби аниқланади.

Кўриниб турибдики, (2) ва (3) га асосан биринчи тур ва иккинчи тур хатоликларни қуввати функцияси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\alpha = W(S;\ \theta), \quad \beta = 1 - E(S;\ \theta)$$

Шундай қилиб берилган ҳар бир қийматдорлик даражаси α, барча S-критериялар тўплами P_α ни қараймиз. Масаланинг моҳиятига асосан $\theta = \theta_1$ да энг катта қийматга эга бўладиган S^*-критерияни

$$W(S^*, q_0) = a, \quad W(S^*, q_1) = \max_{S \in P_a} W(S, q) \qquad (5)$$

тенгликлардан аниқлаймиз. Бу (5) шартларни қаноатлантирувчи S^* критерийни оптимал ёки катта қувватли критерий деб аталади. Бироқ амалиётда (5) шартни қаноатлантирувчи оптимал критерий мавжуд бўлмас экан. Шу сабабли одатда оптимал критерияни қуйидагича ахтарилади. Бунинг учун S критерийни $\varphi(x)$ функция билан қуйидагича боғлаймиз:

$$j(x) = \begin{cases} 1, & агар \quad x \in S \ \ булса \\ 0, & агар \quad x \overline{\in} S \ \ булса \end{cases} \qquad (6)$$

Бу ерда $\varphi(x)$-функцияни тенглама x қийматни қабул қилгандаги асосий гипотеза H_0 ни инкор этиш эҳтимоллиги деб қараш мумкин.

Шундай қилиб, ҳар бир танланманинг x қиймати билан қандайдир қиймати 1 ва 0 бўлган тажрибани чамбарчас боғлаш мумкин ва 1 қиймати φ (x) эҳтимоллик билан, 0 қиймати 1-φ(x) эҳтимоллик билан қабул қилади.

Демак φ(x)=1 бўлса H_0-инкор этамиз; φ(x)=0 бўлса H_0-ни қабул этамиз.

Бундай критерийнинг қувват функцияси φ-критерий деб атаймиз ва уни

$$W(j,q) = \int j\,\boldsymbol{(x)f(x,0)dx} = M_0 j(x)$$

каби аниқлаймиз. Бу ерда M_0 зичлик функцияси *f(x,q)* тенг бўлган ξ-тасодифий миқдорнинг математик кутилмасидан иборат. У ҳолда φ-критерийнинг қийматдорлик даражаси

$$a = W(j;q_0) = M_{q_0} j(x),$$

иккинчи тур хатолик эҳтимоллиги эса

$$b = 1 - W(j;q_1) = 1 - M_{q_1} j(x)$$

У ҳолда барча φ-критерийлар ичида қийматдорлик даражаси α-га тенг бўлган P_α критерийлар ичида оптимал ёки энг катта қувватлиси φ^*-критерий

$$W(j^*;q_0) = a, \qquad W(j^*;q_1) = \max_{j \in P_a} W(j;q_1) \qquad (7)$$

тенгликлардан топилади ва (7) масала ҳар доим ечимга эга бўлади.

Статистик гипотезаларни текшириш.

Статистик гипотезаларни текшириш параметрларни баҳолаш назарияси билан узвий боғлиқдир. Таббиётда, техникада ва иқтисодиётда кузатиш натижаларига асосланиб, кўпинча, у ёки бу фикрларни ўринлигини текширишда гипотезаларга таянадилар.

Маълум бир типга ёки алоҳида олинган параметрларга нисбатан қаралаётган гипотезалар статистик гипотезалар деб аталади. Масалан, бир хил техник шароитларда бир хил ишни бажарувчи ишчиларнинг меҳнат унумдорлиги нормал тақсимотга эга деган фараз статистик фараз бўлади. Бир хил типдаги параллел станокларда ишлаб чиқарилаётган деталларнинг ўртача ўлчовлари бир хил деган фараз ҳам статистик фаразга мисол бўла олади.

Умумий ҳолда статистик гипотезаларни текшириш масаласини баён қиламиз. Айтайлик, $f(x,\theta)$-θ- номаълум параметрга эга бўлган тасодифий миқдор ξ нинг зичлик функцияси бўлсин. Фараз этайлик, $\theta=\theta_0$ гипотезани текшириш зарур бўлсин.

Бу гипотезани 0-чи гипотеза деб атаймиз ва уни H_0 каби белгилаймиз. Демак, $H_0:\theta=\theta_0$ асосий гипотеза, $H_1:\theta=\theta_1$ эса унга муқобил гипотеза бўлсин. Тасодифий миқдор ξ устида ўтказилган n та боғлиқсиз кузатиш натижалари $x_1,x_2,...,x_n$ га таяниб, H_1 муқобил гипотезага нисбатан H_0 асосий гипотезанинг ўринлилигини текшириш бизнинг асосий мақсадимиздан иборат бўлади. Барча $(x_1,x_2,...,x_n)$ танланмалар тўпламини X деб белгилайлик. X ни иккита кесишмайдиган тўпламларга ажратиш мумкин, яъни $X=W\cup S$ ва $W\cap S=\varnothing$.

Агар $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in W$ бўлса, асосий гипотеза H_0 инкор этилади, агар, $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in S$ бўлса, H_0 гипотеза қабул қилинади. W тўпламни критик соҳа, S- ни эса йўл қўйиладиган қийматлар соҳаси деб аталади. Равшанки, $x\in W$ ёки $x\in S$ муносабатлардан биттасини ўринлигини кўрсатилса, иккинчи муносабатни ҳам бир қийматли аниқлаш мумкин.

Критик соҳа W ни қандай қуриш керак деган савол туғилади. Охирги масала кўзга кўринган йирик математиклар Е.Нейман, Э.Пирсонларнинг илмий ишларида мукаммал баён этилган. Критик соҳа W ни танлашда асосий гипотеза H_0 ни қабул қилиш ва инкор этиш билан икки турли хатога йўл қўйиш мумкин. Аслида, H_0 асосий

гипотеза тўғри бўлган ҳолда H_1 муқобил гипотезани қабул қилиб, H_0 ни инкор этиш билан йўл қўйилган хатони 1- жинсли хато деб аталади. H_1 муқобил гипотеза тўғри бўлиб, H_0 асосий гипотезани қабул этиш орқали йўл қўйилган хатони 2 жинсли хато дейилади.
Бу ерда

$$P(H_1/H_0)=\alpha\ ,\ \ P(H_0/H_1)=\beta \text{ мос равишда}$$

биринчи ва иккинчи жинсли хатоларнинг эҳтимолликларини билдиради. Биринчи, иккинчи жинсли хатолар эҳтимолликлари α ва β ларини критик соҳа W ни танлаш билан бир қийматли равишда аниқлаш мумкин. Статистик гипотезаларни текшириш назариясида тайинланган ҳажмли танланмалар учун мос келувчи W критик соҳани танлаш билан α ва β ларни қийматини исталганча кичик қилиб олиш мумкин.

Иккинчи жинсли хатони W критерия (ўлчов)нинг қуввати дейилади ҳамда критерийни танлашда иккинчи жинсли хато β ни мумкин қадар катта танлашга ҳаракат қилинади. (Эслатиб ўтамизки, биринчи жинсли хато берилган деб ҳисобланади) Ушбу масала энг катта қувватли критерияни танлаш масаласига олиб келади.Бу принципнинг амалиётда қўлланишини бир мисолда кўриб чиқамиз.

Айтайлик, зичлик фнкцияси $f(x,\theta)$ бўлган $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ танланма берилган бўлсин. Қандайдир H гипотезани текшириш учун критерийни қуйидагича танлаш мумкин. Айтайлик, $W\subset R^n$ нинг қандайдир тўплам остиси бўлсин. Агар $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\subset W$ бўлса, H гипотезани инкор қилинади, акс ҳолда H гипотезани қабул қилинади.W тўпламни критик тўплам ёки критик соҳа деб аталади. Гипотеза $H:\theta=\theta_0$ бўлсин. Бу ҳолда $P(x\in W)$ эҳтимолликни H гипотеза ўринли бўлганда кичикроқ, акс ҳолда эса каттароқ қилиб танлаш керак. Юқорида баён қилинган ғояга асосан биринчи жинсли хато $\alpha=P(W/\theta_0)$ берилган деб ҳисоблаймиз. W критериянинг ихтиёрий йўл қўядиган $\theta_1(\neq\theta_0)$ қийматлари учун W ни шундай танлаймизки, $\beta=P(W/\theta_1)$ имкон қадар катта бўлсин. W критериянинг йўл қўядиган қийматларида $\theta_1(\neq\theta_0)$ни тайинланган деб ҳисоблаб, қуйидаги X тўпламни қараймиз:

$$X=\{x: x=(x_1,x_2,\dots x_n): f(x_1,q_1)f(x_2,q_1)\dots f(x_n,q_1)\geq Cf(x_1q_0)f(x_2,q_0)\dots f(x_n,q_0)\}$$

Бу ерда $C\geq 0$ ихтиёрий манфий бўлмаган сон.

$$f(x_1,q_1)f(x_2,q_1)\dots f(x_n,q_1) \text{ ва } f(x_1q_0)f(x_2,q_0)\dots f(x_n,q_0)$$

лар мос ҳолда $H_1:\theta=\theta_1$ ва $H:\theta=\theta_0$ гипотезаларнинг ўхшашлик функциялари,

$$\frac{f(x_1,q_1)f(x_2,q_1)\dots f(x_n,q_1)}{f(x_1,q_0)f(x_2,q_0)\dots f(x_n,q_0)}$$

нисбатни эса ўхшашлик муносабати, X ни ўхшашлик муносабатининг критерияси деб аталади. X тўплам C га боғлиқ бўлгани учун $P(x/\theta_0)=h(c)$, C га нисбатан функциядир. Агар $C_1<C_2$ бўлганда, $\mathbf{X}_{\mathbf{c}_1}\supset X_{c_2}$ эканлигидан, h(C)-ўсмовчи функция бўлиб, кўриш осонки, $h(C)\geq 0$, $h(0)=1$.

Энди $h(C)\leq\frac{1}{C}$ эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам

$$Ch(C)=CP(x|q_0)=C\grave{\underset{x}{0}}f(x_{1,}q_0)\dots f(x_n,q_0)dx_1dx_2\dots dx_n \pounds$$
$$\grave{\underset{x}{0}}f(x_{1,}q_1)f(x_2,q_1)\dots f(x_n,q_1)dx_1dx_2\dots dx_n \pounds 1$$

Демак, $0\leq h(C)\leq\frac{1}{C}$ ва охиргидан $C\to+\infty$ интилганда $h(C) \circledR 0$ келиб чиқади. Айтайлик, C нинг шундай қиймати мавжуд бўлсинки,

$$P(x/q_0) = h(C) = e$$

тенглик бажарилсин. Биринчи жинсли хато ε га тенг бўлган бошқа бир критерия $P(W/\theta_0)=\varepsilon$ ни W деб белгилаймиз ҳамда $H_1:\theta_1=\theta_0$ гипотеза ўринли бўлганда $P(X/q_1) \geq P(W/q_1)$ муносабат ўринлигини кўрсатамиз. Охирги муносабат W дан катта қувватли X критерий мавжуд эканлигини исботлайди ва мавзунинг маъноси ҳам ана шундан иборат. Энди охирги $P(X/q_1) \geq P(W/q_1)$ тенгсизликни ўринлигини кўрсатишга қайтамиз.

$$P(X - XW/q_0) = e - P(WX/q_0) = P(W - WX/q_0)$$

X-нинг аниқланишига кўра $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \bar{X}$ муносабатга тенг кучли тенгсизликни эътиборга олиб,

$$P(X - WX/q_1) \geq CP(X - WX/q_0) = CP(W - WX/q_0) \geq P(X - WX/q_1)$$ ни

топамиз. Тенгсизликнинг иккала томонига $P(WX/q_1)$ ни ҳадлаб қўшиб,

$$P(X/q_1) \geq P(W/q_1)$$

исботланиши зарур бўлган тенгсизликка эга бўламиз. Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Нейман-Пирсоннинг оптимал критерийси

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$f_0(x) = f(x;q_0),\;\; f_1(x) = f(x;q_1);\quad M_0 j = \int j(x) f_0(x)dx,$$

$$M_1 j = \int j(x) f_1(x)dx.$$

Оптимал критерийни (7) тенглик ўринли бўладиган ўхшашлик муносабатлари деб аталувчи

$\frac{f_1(x)}{f_0(x)}$- критерийлар ичидан ахтарамиз.

Аниқроғи бу саволга қуйидаги Нейман-Пирсон теоремаси жавоб беради.

<u>Нейман-Пирсон теоремаси</u>. Ихтиёрий 0≤ α ≤ 1 сон учун шундай c≥ 0 ва 0 ≤ ε ≤ 1 сонлари топилиб,

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad f_1(x) > cf_0(x) \\ \varepsilon, & \text{агар} \quad f_1(x) = cf_0(x) \\ 0, & \text{агар} \quad f_1(x) < cf_0(x) \end{cases} \qquad (8)$$

функцияга эга бўлган φ^* критерия α-қийматдорлик даражасига тенг бўлган (7) тенгликни қаноатлантирувчи оптимал критерияни аниқлайди.

Исботи. Айтайлик 0 < α < 1 бўлсин. α=0 ва α=1 бўлган ҳолларни алоҳида сўнгра текшириб чиқамиз ва буни бу ерда келтирмаймиз.

H_0 ўринли бўладиган с га нисбатан

$$g(c) = P\{f_1(x) > c\ f_0(x) / H_0\}$$

функцияни қараймиз.

Равшанки, у ҳолда

$$P\left\{\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \le c / H_0\right\} = 1 - g(c)$$

Бу функция ўнгдан узлуксиз ва $g(\infty)=0,\ g(-0-)=1$ C_α -ни

$$g(c_\alpha) \le \alpha < g(c_\alpha - 0)$$

тенгликдан аниқлаймиз. Агар $g(c_\alpha) < g(c_\alpha - 0)$ бўлса,

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\alpha - g(c_\alpha)}{g(c_\alpha - 0) - g(c_\alpha)}$$ деб оламиз.

Агар $g(c_\alpha) = g(c_\alpha - 0)$ бўлса, $\varepsilon_\alpha=0$ оламиз. мабодо бутун $c_1 \le c \le c_2$ кесмада $g(c)=\alpha$ бўлса, c_α сифатида ушбу кесмадаги ихтиёрий нуқтани, масалан энг чапни нуқтани олиш мумкин.

Топилган $c=c_\alpha$ ва $\varepsilon = \varepsilon_\alpha$ қийматларни (8) тенгликка қўйиб φ^* функцияга эга бўламиз. Ушбу $\varphi^*(x)$ функцияга мос келувчи φ^*-критерияни (7) муносабатни қаноатлантирувчи ва 2-қийматдорлик даражасига эга бўлган оптимал критерия эканлигини исботлаймиз.

Шундай қилиб

$$M_0\varphi^* = \int\limits_{f_1(x)>c_\alpha f_0(x)} p_0(x)dx + \frac{\alpha - g(c_\alpha)}{g(c_\alpha - 0) - g(c_\alpha)} \int\limits_{f_1(x)=c_\alpha f_0(x)} =$$

$$= g(c_\alpha) + \frac{\alpha - g(c_\alpha)}{g(c_\alpha - 0) - g(c_\alpha)} \times (g(c_\alpha - 0) - g(c_\alpha)) = g(c_\alpha) + \alpha - g(c_\alpha) = \alpha \quad (2)$$

Айтайлик φ-бошқа бир критерия бўлиб $M_0\varphi \le \alpha$ бўлсин, у ҳолда $M_1\varphi^* \ge M_1\varphi$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$\int (\varphi^*(x) - \varphi(x))(f_1(x) - c_0 f_0(x))dx \qquad (9)$$

интегрални қараймиз.

$$\int (\varphi^*(x) - \varphi(x))(f_1(x) - c_0 f_0(x))dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi^*>\varphi} (\varphi^* - \varphi)(f_1 - c_0 f)dx + \int\limits_{\varphi^*<\varphi} (\varphi^* - \varphi)(f_1 - c_0 f_0)dx \qquad (10)$$

(10) ифоданинг биринчи қўшилувчиси $\varphi^*(x) > \varphi(x)$ бўлгани учун $f_1(x) \geq c_a f_0(x)$ шу сабабли интеграл остидаги функция манфий эмас. Иккинчи қўшилувчида $\varphi^*(x) < \varphi(x) \leq 1$ бўлгани учун $f_1(x) \geq c_a f_0(x)$ бўлиб, бу интеграл остидаги функция ҳам манфий эмас. Демак (9) интеграл манфий эмас, яъни

$$\int (\varphi^* - \varphi) f_1(dx) \geq c_a \int (\varphi^* - \varphi)dx \quad \text{ёки}$$

$$M_1\varphi^* - M_1\varphi \geq c_a(\alpha - M_0\varphi) \geq 0$$

шуни исботлаш керак эди, яъни φ^* - оптимал критерия экан.

Нормал тақсимот параметрлари ҳақидаги гипотезаларни текшириш учун оптимал критерия.

Айтайлик $(x_1, x_2, .., x_n)$ боғлиқсиз ва (α, σ) параметрга эга нормал тақсимотга мос n-ҳажмли танланма бўлиб, σ-маълум ҳамда a-номаълумга нисбатан қуйидаги иккита гипотеза қаралаётган бўлсин:

$$H_0 : a = a_0$$
$$H_1 : a = a_1 > a_0$$

Нейман-Пирсон теоремаси бўйича оптимал критерийни қурамиз.

Бизнинг ҳолимизда

$$f_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_j)^2}, \quad (j = 0,1)$$

ва

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \exp\left\{ n\ \bar{x}(a_1 - a_0) - \frac{n}{2\sigma^2}\left(a_1^2 - a_0^2\right)\right\}, \qquad (11)$$

бу ерда $\bar{x}$-танланманинг ўртача қиймати.

(11) дан $f_1(x)/f_0(x) > c$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар қандайдир c_1 учун $\bar{x} > c_1$ бўлганда ўринли бўлади.

Бироқ $\bar{x} \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ бўлганлиги сабабли биринчи ва иккинчи тур хатоликлар мос ҳолда қуйидагиларга тенг:

$$\alpha = P\{\bar{x} > c_1 / H_0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu = \Phi\left(\frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad (12)$$

$$\beta = P\{\bar{x} \leq c_1 / H_1\} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{\frac{e_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n}} e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu = \Phi\left(\frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad (13)$$

U_v-ни

$$1 - \Phi\ (U_v) = v \qquad (14)$$

тенгликдан топамиз. Текшириб кўриш осонки, (12) ва (13) дан $u_v = -u_{1-v}$ ва

$$\frac{c_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n} = u_\alpha, \qquad \frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} = u_\beta,$$ бундан $$c_1 = a_0 + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = a_1 = u_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Охирги ифодадан

$$n = \frac{\sigma^2 (u_\alpha + u_\beta)^2}{(a_1 - a_0)^2}, \qquad (15)$$

n- тенг бу топилган қиймати оптимал критерийга мос бўлиб, агар у бутун сон бўлмаса n- нинг қиймати сифатида унга яқин энг катта бутун сонни олинади.

Энди қуйидаги иккита гипотезани қараймиз:

$$H_0: \ a = 0, \ \sigma = \sigma_0$$
$$H_1: \ a = 0, \ \sigma = \sigma_1 > \sigma_0$$

Бу ҳолда ўхшашлик нисбати

$$\frac{f_0(x)}{f_1(x)} = \frac{\sigma_0^n}{\sigma_1^n} \exp\left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sum_{i=1}^{n} \chi_i^2 \right\}$$

бундан

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq c_1$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи критик соҳани топишга келамиз.

Маълумки,

$$\frac{\chi_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma^2}$$

тасодифий миқдор озодлик даражаси n га тенг бўлган

$K_n(x) = \int_0^x k_n(\nu)dx, \quad x \geq 0$ хи-квадрат тақсимотга эга бўлиб, унинг зичлик функцияга

$$k_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0$$

Шу сабабли биринчи ва иккинчи тур хатоликлар

$$a = P\left\{ \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{c_1}{\sigma_0^2} \right\} = 1 - k_n\left(\frac{c_1}{\sigma_0^2} \right),$$

$$b = P\left\{ \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{c_1}{\sigma_1^2} \right\} = k_n\left(\frac{c_1}{\sigma_1^2} \right).$$

Шуни топиш талаб қилинган эди, α ва β қийматларини эса α-қийматдорлик даражаси ва озодлик даражасига қараб Пирсон жадвалидан топилади.

РЕГРЕССИОН АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТЛАРИ.

Тажриба натижаларини статистик ишлаб чиқариш масалаларига тақсимотнинг параметрларини, сонли характеристикаларни ҳисоблаш, параметрларни баҳолаш, корреляция, регрессия, дисперсион таҳлил, тажрибаларни режалаштириш каби масалалари киради. Кузатишларни ишлаб чиқариш масалалари анча илгари ва биринчи навбатда астрономия масалаларига боғлиқ ҳолда пайдо бўлган. Илк бор улар француз математиги Лежандр (1752-1833) ва немис математиги Гаусс (1777-1855) ишларида қаралган. Кузатиш натижаларини математик нуқтаи назардан ўрганиш, физика, химия, биология, экономика, медицина ва бошқа фанларнинг ривожланишида алоҳида аҳамиятга эга бўлиб қолмоқда.

Шу ўрганилган масалалар ичида дисперсион таҳлил математик статистикада алоҳида ўрин тутади. Дисперсион таҳлил тажриба натижасига таъсир этувчи алоҳида факторларни аниқлашда ҳамда шунга ўхшаш тажрибаларни режалаштиирishдан иборатдир.

Дастлаб дисперсион таҳлил Р.Фишер [1] томонидан юқори ҳосил берадиган қишлоқ хўжалик маҳсулотларини агрономик нуқтаи назардан ўрганиб, сўнгра таҳлил қилишлар натижасини аниқлаш мақсадида фойдаланилган. Ҳозирги вақтда дисперсион таҳлил жуда кенг маънода иқтисодиёт, социологик тадқиқотларда қўлланилиб келмоқда.

Фараз этайлик, бир қанча бир хил станоклар ва бир қанча турли хом- ашёларга эгамиз. Партияда ишлаб чиқарилаётган деталларнинг сифатига турли стационар ва турли хом ашёларнинг таъсири муҳимми ёки йўқми деган масалани ўрганиш талаб этилади. Бу эса икки факторли дисперсион таҳлил масаласидан иборатдир.

А-станокларнинг таъсири, В-эса хом ашёларнинг таъсирини ифодаласин. Ишлаб чиқарилаётган деталларнинг ўлчовини x_{ij} билан белгилаймиз. Соддалик учун ҳар бир партиядаги станок ва хом ашё фақат битта кузатиш бўлган ҳолни қараймиз.

Кузатиш натижаларини қуйидаги I-жадвал кўринишда ифодалаш мумкин.

I-жадвал

Станокда (i) \ партиядаги ҳом ашёлар (j)	B_1	B_2	…	B_j	…	B_v	$\bar{x}_{1*}$
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1v}	$\bar{x}_{1*}$
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2v}	$\bar{x}_{2*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
A_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{jv}	$\bar{x}_{j*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
A_r	x_{r1}	x_{r2}	…	x_{rj}	…	x_{rv}	$\bar{x}_{r*}$
$\bar{x}_{*j}$	$\bar{x}_{*1}$	$\bar{x}_{r2}$	…	$\bar{x}_{*j}$	…	$\bar{x}_{*v}$	$\bar{x}$

Айтайлик r та $A_1, A_2, \ldots, A_r$ станокларга эга бўлайлик, жадвалда уларга r та устунлар мос келади, биз уларни факторлар сатҳи деб айтаймиз.

i -сатр ва j -устунларнинг кесишган жойи ij-ячейка деб белгилаймиз, у ерда ёзилган x_{ij} - А ва В факторларнинг бир вақтда кузатгандаги i ва j сатҳларларга мос келувчи кузатиш натижаларини билдиради.

Ҳар бир устун ва ҳар бир сатр бўйича ўртача қийматларни ва умумий ўртача ва умумий қийматларни қуйидаги формулалар орқали ҳисоблаймиз.

$$\overline{x}_{i*} = \frac{1}{v}\sum_{S=1}^{v} xij, \quad (i = \overline{1,r}), \qquad \overline{x}_{*j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} xij (j = \overline{1,v}),$$

$$\overline{x} = \frac{1}{rv}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} xij$$

Бир факторли дисперсион таҳлилнинг асосий айнияти қуйидагича бўлади:

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij} - \overline{x}_{i*} - \overline{x}_{*j} + \overline{x} + \overline{x}_{i*} - \overline{x} + \overline{x}_{*j} - \overline{x})^2 =$$

$$= v\sum_{i=1}^{r}(\overline{x}_{i*} - \overline{x})^2 + r\sum_{j=1}^{v}(\overline{x}_{*j} - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij} - \overline{x}_{i*} - \overline{x}_{*j} + \overline{x})^2 \qquad (1)$$

Агар $Q_1 = v\sum_{i=1}^{r}(\overline{x}_{i*} - \overline{x})^2;$

$$Q_2 = r\sum_{j=1}^{v}(\overline{x}_{*j} - \overline{x})^2;$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij} - \overline{x}_{i*} - \overline{x}_{*j} + \overline{x})^2$$

деб белгиласак.

У ҳолда (1) дан

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3 \qquad (2)$$

тенгликка эга бўламиз.

Q_1 сатрлар бўйича кузатиш натижаларининг ўртача қийматлари ва умумий ўртачадан айирмаларининг квадратлари йиғиндисидан иборат бўлиб, белгининг А фактор бўйича ўзгаришини характерлайди. Q_2 - эса устунлар бўйича кузатиш натижаларининг ўртача қийматлари ва умумий ўртача айирмаларининг квадратлари йиғиндисидан иборат бўлиб, белгининг В фактор бўйича ўзгаришини характерлайди.

Q_1 - сатрлар бўйича кузатиш натижаларининг ўртача қийматлари ва умумий ўртачадан айирмаларининг квадратлари йиғиндисидан иборат бўлиб, белгининг А фактор бўйича ўзгаришини характерлайди. Q_2 - эса устунлар бўйича кузатиш натижаларининг ўртача қийматлари ва умумий ўртача айирмаларнинг квадратлари йиғиндисидан иборат бўлиб, белгининг В фактор бўйича ўзгаришини характерлайди. Q_3 - ни қолдиқ йиғинди деб аталиб, у қолган ҳадлар йиғиндиларининг йиғиндисидан иборат ҳамда у белгида ҳисобга олинмаган таъсирларни (факторларнинг) ифодаловчи характеристикадир.

Q - алоҳида кузатиш натижаларини умумий ўртачадан фарқлари квадратлари йиғиндисидан иборат бўлиб, уни умумий йиғинди ёки тўла йиғинди деб аталади.

Дисперсия баҳоларини ҳисоблаймиз:

$$S^2 = \frac{1}{rv-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij}-\bar{x})^2 = \frac{Q}{rv-1}, \tag{3}$$

$$S_1^2 = \frac{1}{r-1}\cdot v\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i-\bar{x})^2 = \frac{Q_1}{r-1}, \tag{4}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{v-1}\cdot r\sum_{j=1}^{v}(\bar{x}_j-\bar{x})^2 = \frac{Q_2}{v-1}, \tag{5}$$

$$S_3^2 = \frac{1}{(r-1)(v-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{u}(x_{ij}-\bar{x}_{i*}-\bar{x}_{*j}+\bar{x})^2 = \frac{Q_3}{(v-1)(r-1)} \tag{6}$$

Икки факторли дисперсион таҳлилда А ва В факторларнинг қидирилаётган белгига қанчалик таъсирини аниқлаш учун дисперсияларнинг факторлар бўйича қолдиқ дисперсияларини таққослайдилар. Аниқроғи, ушбу $\frac{S_1^2}{S_3^2}$ ва $\frac{S_2^2}{S_3^2}$ нисбатларни таққослаш керак бўлади.

Маълумки, агар тасодифий белги нормал тақсимланган бўлса, танланма дисперсияларининг юқоридаги нисбатлари F-Фишер тақсимотига эга бўлади. Шу сабабли

$$F_A = \frac{Q_1/(r-1)}{Q_3/(r-1)(v-1)} = \frac{S_1^2}{S_3^2},$$

$$F_B = \frac{Q_2/(v-1)}{Q_3/(r-1)(v-1)} = \frac{S_2^2}{S_3^2} \qquad (*)$$

α - қийматдорлик даражасини масала шартига мувофиқ берилиб, Пирсон жадвалидан F_α - қиймат топилади ва уни F_A, F_B нинг қийматлари билан таққосланади.

Агар $F_A<F_\alpha$ ва $F_B<F_\alpha$ бўлса А ва В факторларнинг қидирилаётган белгига таъсири аҳамияти муҳим эмас деган асосий гипотеза H_0, аниқроғи танланмаларнинг ўрта қийматлари тенг деган гипотезани қабул қилинади.

Икки факторли дисперсион таҳлилда тўпланган тажрибалар уни қуйидаги 2- жадвал кўринишида тасвирлаш қулай эканини кўрсатади.

2- жадвал

Дисперсия компонентлари	Квадратлар йиғиндиси	Озодлик даражалари сони	Дисперсия баҳолари
Сатрлараро бўйича ўртача қийматлар	$Q_1 = v\sum_{i=1}^{v}(\bar{x}_{ik}-\bar{x})^2$	$r-1$	S_1^2

Устунлараро ўртача қийматлар	$Q_2 = r\sum_{j=1}^{v}(\bar{x}_{*j} - \bar{x})^2$	$v-1$	S_2^2
Қолдиқ	$Q_3 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij} - \bar{x}_{i*} - \bar{x}_{*j} + \bar{x})^2$	$(r-1)(v-1)$	S_3^2
Тўла йиғинди ёки умумий йиғинди	$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij} - \bar{x})^2$	$rv-1$	S^2

Ячейкада битта кузатиш бўлган ҳолда икки факторли дисперсион таҳлил учун бир мисол келтирамиз.

Учта В факторли (B_1, B_2, B_3) ва иккита А факторли (A_1, A_2) бўлган ҳолни қарайлик ва ўтказилган статистик маълумотлар натижаси эса қуйидаги 3-жадвалда берилган бўлсин:

3-жадвал

B A	B_1	B_2	B_3	$\bar{x}_{i*}$
A_1	1	2	3	
A_2	5	6	10	
$\bar{x}_{*j}$				

$$\bar{x}_{1*} = \frac{1+2+3}{3} = 2;$$

$$\bar{x}_{2*} = \frac{5+6+10}{3} = \frac{21}{3} = 7;$$

$$\bar{x}_{*1} = \frac{1+5}{2} = 3; \qquad \bar{x}_{*2} = \frac{2+6}{2} = 4; \qquad \bar{x}_{*3} = \frac{3+10}{2} = 6{,}5$$

ҳисоб китобларни 3-жадвалга жойлаштирамиз.

3-жадвал

B / A	B_1	B_2	B_3	$\bar{x}_{i*}$
A_1	1	2	3	2
A_2	5	6	10	7
$\bar{x}_{*j}$	3	4	6,5	

$$\bar{x} = \frac{(1+2+3)+(5+6+10)}{2\cdot 3} = \frac{6+21}{6} = \frac{27}{6} = 4,5$$

Q_1, Q_2, Q_3, Q квадратлар йиғиндиси юқорида берилган формулалар бўйича ҳисоблаймиз.

Мисолимизда: $v=3;\ r=2$

$$Q_1 = v\sum_{i=1}^{r}(x_{i*}-\bar{x})^2 = 3\sum_{i=1}^{2}(x_{i*}-\bar{x})^2 = 3[(2-4,5)^2+(7-4,5)^2] = 3[(-2,5)^2+2,5^2] =$$

$$= 3(6,25+6,25) = 3\cdot 12,5 = 37,5;$$

$$Q_2 = r\sum_{j=1}^{v}(\bar{x}_{i*}-\bar{x})^2 = 2\sum_{j=1}^{3}(\bar{x}_{i*}-\bar{x})^2 = 2[(3-4,5)^2+(4-4,5)^2+(6,5-4,5)^2] =$$

$$= 2[(-1,5)^2+(-0,5)^2+2^2] = 2\,[2,25+0,25+4] = 2\cdot 6,3 = 13;$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v}(x_{ij}-\bar{x}_{i*}-\bar{x}_{j*}+\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(x_{ij}-\bar{x}_{i*}-\bar{x}_{*j}+\bar{x})^2 =$$

$$= (1-2-3+4,5)^2+(2-2-4+4,5)^2+(3-2-6,5+4,5)^2+$$

$$+(5-7-3+4,5)^2+(6-7-4+4,5)^2+(10-7-6,5+4,5)^2 =$$

$$= 0,5^2+0,5^2+(-1)^2+(-0,5)^2+(-0,5)^2+1^2 = 0,25+0,25+1+0,25+0,25+1 = 3;$$

Бундан $Q=Q_1+Q_2+Q_3=$ 37,5+13+3=53,5

Диспепрсиялар баҳоларини (4)-(6) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$S_1^2=\frac{Q_1}{r-1}=\frac{37{,}5}{2-1}=\frac{37{,}5}{1}=37{,}5;$$

$$S_2^2=\frac{Q_2}{v-1}=\frac{13}{3-1}=\frac{13}{2}=6{,}5;$$

$$S_3^2=\frac{Q_3}{(v-1)(r-1)}=\frac{3}{(3-1)(2-1)}=\frac{3}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

Буларни эътиборга олиб II жадвални туза оламиз:

Дисперсия компонентлари	Квадратлар йиғиндиси	Озодлик даражалари	Дисперсия баҳолари
Сатрлараро ўртача қийматлар	37,5	1	37,5
Устунлараро ўртача қийматлар	13	2	6,5
қолдиқ	3	2	1,5
Умумий йиғинди	53,5	5	10,7

(3) дан $S^2=\frac{Q}{rv-1}=\frac{53{,}5}{2\cdot 3-1}=\frac{53{,}5}{5}=10{,}7$

(*) формуладан F_A ва F_B Фишер критериясининг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$F_A=\frac{S_1^2}{S_3^2}=\frac{37{,}5}{1{,}5}=\frac{375}{15}=25$$

$$F_B = \frac{S_2^2}{S_3^2} = \frac{6,5}{1,5} = \frac{65}{15} = 4,3$$

Агар қийматдорлик даражаси α-ни $\alpha=0,05$ деб танласак, озодлик даражалари $k_1=1$, $k_2=2$ эканлигини билган ҳолда Пирсон жадвалидан $F_A^a = 18,51;$ худди шу каби В фактор бўйича $k_1 = 2;$ $k_2 = 2,$ $a = 0,05$ эканлигидан жадвалдан $F_B^a = 19$ га эга бўламиз.

Шундай қилиб

$$F_A = 25; \quad F_A^a = 18,51$$
$$F_B = 4,3; \quad F_B^a = 19$$

$F_A > F_A^a$ эканлигидан сатрлар бўйича ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги гипотеза рад этилади, $F_B < F_B^a$ эканлигидан устунлар бўйича ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги гипотеза қабул қилинади. Бошқача айтганда А факторнинг қаралаётган тасодифий белгига таъсири муҳим, В факторнинг таъсири эса муҳим эмас.

АДАБИЁТЛАР

1. С.Х.Сирожиддинов, М.Маматов. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т.Ўқитувчи, 1980, 256 б.
2. Б.А.Севастьянов. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1982, 256 с.
3. И.Н.Коваленко, А.А.Филиппова. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1982, 256 с.
4. Математическая статистика (под редакцией профессора А.М.Длина)
5. М.Холлендер, Д.А.Вулф. Непараметрические методы статистики. М., 1983, 519 с.
6. Ван дер Варден. Математическая статистика. М., 1960.
7. М.Султанова. Вариацион статистика. Т., 1977.
8. В.Е.Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир кўрсатма. Т., 1980, 367 б.

МУНДАРИЖА